









Probability

TD

Die

Wahrscheinlichkeitsrechnung

in ihrer Anwendung

auf das

wissenschaftliche und practische Leben.

Von

J. J. Littrow,

Director der Sternwarte und Professor der Astronomie an der k. k. Universität in Wien, Ritter des k. russ. St. Anna-Ordens der zweyten Classe, Mitglied mehrerer gelehrten Gesellschaften in London, Petersburg, Kasan, Palermo ꝛc.

Wien.

F. Beck's Universitätsbuchhandlung.

1833.

Gedruckt
bey
A. Strauß's sel. Witwe.

Vorrede.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist eine neue, und unsern Vorgängern, so wie die Mechanik, ganz unbekannte Wissenschaft und der Theil derselben, welcher die Anwendung dieser Rechnung auf die Beobachtungen enthält und unter der Benennung der „Methode der kleinsten Quadrate“ bekannt ist, gehört ganz unseren Zeiten an, indem wir die eigentliche Ausbildung desselben vorzüglich unsern beyden Zeitgenossen, Gauß und Laplace, verdanken.

Dieses jugendliche Alter der Wissenschaft, verbunden mit den Schwierigkeiten eigener Art, welche ihr Studium darbiethet, ist ohne Zweifel die Ursache, daß sie unter uns noch so wenig bekannt ist. Ihre große Wichtigkeit macht sie aber einer besondern Berücksichtigung in einem sehr hohen Grade würdig, sowohl an sich selbst, als auch in ihren mannigfaltigen Anwendungen auf sehr viele Vorfälle des Lebens. Beynahe alle unsere menschlichen, sogenannten, Wahrheiten sind nur Wahrscheinlichkeiten und daher Gegenstände, die in das weite Gebieth dieser neuen Wissenschaft gehören.

Die hier folgenden Blätter haben den Zweck, die Leser, nicht sowohl mit den inneren Gründen, als vielmehr mit den äußerst wichtigen Anwendungen dieser Wis-

senschaft bekannter zu machen. Die erste Abtheilung, welche die eigentliche Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrem ganzen Umfange enthält, kann als eine freye Bearbeitung von Laplace's Essais philosophique angesehen werden, eines Werkes, das seiner großen Wichtigkeit wegen schon längst eine deutsche Uebersetzung mit Erläuterungen der schwereren Stellen verdient hätte. Die zweyte Abtheilung, welcher größtentheils die Entdeckungen unsers Gauß zu Grunde liegen, beschäftiget sich mit einem abgesonderten, aber sehr interessanten Zweige dieser Wissenschaft, mit der erwähnten Methode der kleinsten Quadrate und ihrer Anwendung auf physische und astronomische Beobachtungen. Diejenigen Leser, welche sich durch diese Betrachtungen bewogen finden, auch die inneren Gründe und Beweise der hier aufgestellten analytischen Ausdrücke näher kennen zu lernen, werden sie bey den beyden angezeigten Schriftstellern und in den schönen Aufsätzen finden, welche Dr. Hauber in Baumgartner's Zeitschrift für Physik und Mathematik bekannt gemacht hat. Mich würde es freuen, wenn ich dadurch zur weiteren Verbreitung dieser interessanten und wichtigen Kenntnisse etwas beygetragen hätte.

Wien den 18. September 1832.

Der Verfasser.

Erste Abtheilung.

Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt.

Die wichtigsten Fragen, die unsere geselligen Verhältnisse, unser Leben und uns selbst betreffen, lassen sich beynahe alle auf Probleme der Wahrscheinlichkeit zurückführen. Die meisten der menschlichen Erkenntnisse sind nur Wahrscheinlichkeiten, und selbst in denjenigen, die uns Gewißheit gewähren, in den mathematischen Wissenschaften, sind die vorzüglichsten Mittel, zu dieser Gewißheit zu gelangen, Analogie und Induction, die sich beyde wieder auf Wahrscheinlichkeit gründen. Wer endlich in den ewigen und unveränderlichen Principien der Vernunft, der Gerechtigkeit und der Humanität, selbst ohne ihren tieferen Grund zu kennen, auch nur die Glücksfälle aufmerksam betrachtet, welche sie am beständigsten begleiten, wird sich von den Vortheilen, ihnen zu folgen, so wie von der Wahrscheinlichkeit der Nachtheile, die ihre Vernachlässigung beynahe immer nach sich zu ziehen pflegt, bald überzeugen.

Alle Ereignisse, selbst diejenigen, die durch ihre Geringfügigkeit uns ganz zufällig und von den großen Gesetzen der Natur völlig unabhängig erscheinen, sind doch ohne Zweifel eine eben so nothwendige Folge derselben ewigen Gesetze, als es die Bewegung der Sonne und aller Körper des Himmels nur immer seyn kann. Nur unsere Unkenntniß des Zusammenhanges dieser Erscheinungen mit jenen Gesetzen des Weltalls läßt uns die einen derselben von bestimmten Endursachen, die andern aber von dem blinden Zufalle abhängig machen, je nachdem sie in einer bestimmten und sichtbaren Aufeinanderfolge, oder aber ohne irgend eine uns bemerkbare Ordnung vor sich zu gehen scheinen. Die erwähnten, übrigens oft nur eingebildeten Endursachen werden allmählig, wie sich die Gränzen unserer Kenntnisse erweitern, immer mehr und mehr zurückgerückt und sie verschwinden nur

zu oft gänzlich vor dem klaren Blicke des Verstandes, der in den meisten dieser Endursachen nur den Ausdruck der gänzlichen Unkenntniß erblickt, die uns die wahren Ursachen jener Erscheinungen vielleicht für immer zu verbergen droht.

Jedes gegenwärtige Ereigniß muß mit einem ihm vorhergegangenen in irgend einer Verbindung stehen, da Nichts bestehen kann, ohne einen Grund seines Bestehens zu haben. Selbst unsere scheinbar gleichgültigsten Handlungen unterliegen ohne Zweifel demselben Gesetze. Der allerfreyeste Wille wird, wenn gar kein Motiv ihn bestimmt, auch keine Handlung hervorbringen können. Denn wenn alle Umstände zweyer verschiedener Verhältnisse sich durchaus gleich sind und der Wille doch unter dem einen zur Handlung übergeht und unter dem andern unthätig bleibt, so gäbe es eine Wirkung ohne Ursache, die wir wenigstens uns nicht denken können. Das Gegentheil von dieser Annahme ist offenbar nur die Folge einer Selbsttäuschung, welche die oft sehr flüchtigen, aber doch die Wahl bestimmenden Gründe, übersieht und sich überreden will, ohne Gründe und vollkommen frey gewählt zu haben.

Der gegenwärtige Zustand des Universums ist also in allen seinen, auch den scheinbar geringfügigsten Theilen, nur die Folge eines vorhergegangenen, so wie zugleich die Ursache eines künftigen Zustandes desselben. Ein Geist, der alle Kräfte kennt, von denen die Natur belebt wird, und der den gegenwärtigen Zustand aller Wesen, die sie enthält, übersieht, wird vielleicht in einem einzigen Ausdrucke der Analyse alle vergangenen und alle künftigen Erscheinungen der Natur zu umfassen im Stande seyn und die Bewegungen der großen himmlischen Körper nicht minder, als die der Wassertropfen, welche unsere Meere bilden, oder als die der kleinsten Sonnenstäubchen übersehen, welche unsere Atmosphäre erfüllen: für einen solchen Geist wäre nichts unbekannt und nichts wahrscheinlich: nur die Wahrheit selbst würde für ihn da seyn, und die Vergangenheit, wie die Zukunft, würde offen und klar vor seinen Augen liegen.

Nur in einer einzigen Wissenschaft ist es bisher dem menschlichen Geiste gelungen, uns ein, obgleich auch hier nur ein sehr schwaches Bild jener hohen Erkenntniß darzustellen. Die Astro-

nomie hat, mit Hülfe der Mechanik und der Geometrie, den gegenwärtigen und künftigen Zustand der Körper unsers Planetensystems, wenigstens in seinen großen Zügen, in einem einzigen Ausdrucke dargestellt und uns dadurch in den Stand gesetzt, auf Ereignisse in denselben zurückzugehen, die einer, in jeder andern Beziehung uns gänzlich unbekannten Periode der Menschengeschichte angehören, und wieder andere vorauszusagen, welche erst in der spätesten Folgezeit durch die Beobachtungen unserer Nachkommen ihre unbezweifelte Bestätigung erhalten werden. In allen unsern Bemühungen nach Wahrheit und nach der Erkenntniß derselben bemerken wir dieselbe Tendenz, jenem höheren Ziele nachzukommen, wenn wir gleich immer unendlich weit von ihm entfernt bleiben werden. Diese Tendenz ist es, die den menschlichen Geist auszeichnet und ihn von dem der Thiere unterscheidet: sein Fortgang in dieser Beziehung gibt den Jahrhunderten unserer Weltgeschichte und den verschiedenen Völkern, welche die Oberfläche der Erde bewohnen, ihr eigenthümliches Gepräge und den Antheil, den jedes von ihnen an der Vervollkommnung des ganzen Geschlechts und dadurch an wahrem Ruhme anzusprechen hat.

Es ist noch nicht lange her, daß jedes ungewöhnlich trockene oder nasse Jahr, daß jede Finsterniß, jedes Nordlicht, jeder Komet, daß überhaupt eine jede ungewöhnliche Erscheinung der Natur als ein unmittelbares Zeichen des göttlichen Zorns betrachtet worden ist. Man flehte zitternd zu dem Himmel, die gedrohte Strafe abzuwenden. Warum aber bat man ihn nicht auch, den Lauf der Sonne und der Planeten zu ändern? — Die Ursache der letzteren war bekannt und Beobachtungen hatten bereits das Unnütze solcher Bitten gezeigt. Aber von jenen ersten Erscheinungen, die sich nicht so regelmäßig folgten, die nur selten wiederkamen, und deren Gründe man nicht so leicht einsehen konnte, von ihnen glaubte jeder, was ihm gut dünkte oder was seine erschreckte Einbildungskraft ihn zu glauben antrieb. So verbreitete der große Komet des Jahres 1456 Entsetzen über ganz Europa, das ohnehin durch eine verheerende Pest und durch die Fortschritte geängstiget war, welche vor Kurzem die Türken ge-

macht hatten, die das orientalische Kaiserthum zerstörten und sich nun wie ein unaufhaltbarer Strom über die Nachbarländer zu ergießen drohten. Aber wie ganz anders wurde die Erscheinung desselben Kometen zwey Jahrhunderte später aufgenommen. Newton hatte uns seitdem die Gesetze des Weltsystems bekannt gemacht und diese Kenntniß zerstreute schnell den eitlen Schrecken, den nur die Unwissenheit erzeugt hatte. Halley, der jenen Kometen i. J. 1682 beobachtet hatte, erkannte seine Identität mit den Kometen von 1607, 1531 und 1456 und wagte es sogar, seine nächste Wiederkunft auf das Jahr 1759 vorauszusagen. Clairaut berechnete späterhin die Störungen, welche dieser Komet von den beyden größten Planeten unsers Sonnensystems, von Jupiter und Saturn, erleiden mußte und bestimmte seinen nächsten Durchgang durch die Sonnennähe auf den Anfang des April d. J. 1759, eine Bestimmung, welche durch die Beobachtungen vollkommen bestätiget worden ist. Sein nächster Durchgang durch sein Perihelium wird in die Mitte Novembers des Jahres 1835 fallen.

Dieselbe Regelmäßigkeit aber, die wir in der Bewegung der Kometen kennen gelernt haben, wird ohne Zweifel auch bey allen übrigen Phänomenen der Natur statt haben, wenn sie uns gleich, so lange wir ihre Gesetze noch nicht kennen, ganz zufällig und unregelmäßig erscheinen. Die krummen Linien, welche die kleinsten Staubkörnchen oder diejenigen, welche die Elemente der Luftarten und der Dünste beschreiben, sind gewiß eben so geordnet, und eben so bestimmten und unveränderlichen Gesetzen unterworfen, als die Bahnen, welche von jenen großen Körpern des Himmels in dem Weltenraume beschrieben werden, und der Unterschied, der zwischen beyden für uns noch statt hat, liegt nicht in ihnen, sondern einzig nur in uns selbst, in unserer Beschränktheit, in unserer eigenen Unwissenheit.

Was wir daher Wahrscheinlichkeit nennen, hängt zum Theile von dieser Unwissenheit, zum Theile aber auch von unserer, wenn gleich nur genäherten Kenntniß der Naturgesetze ab. Die nähere Bestimmung derselben oder das Maß der Wahrscheinlich-

keit, daß irgend ein Ereigniß eintreten werde, wird offenbar das Verhältniß der Summe der Fälle, welche diesem Eintreten günstig sind, zu der Summe aller möglichen Fälle seyn, vorausgesetzt, daß diese letzten alle gleich möglich sind. Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses wird also im Allgemeinen in der Form eines eigentlichen Bruches dargestellt werden, dessen Zähler die Summe aller günstigen, und dessen Nenner die Summe aller möglichen Fälle enthält. Dieser Bruch nähert sich der Einheit desto mehr, je größer die Anzahl der günstigen Fälle gegen die Anzahl aller möglichen Fälle ist, und nur dann, wenn unter allen möglichen Fällen gar kein ungünstiger ist d. h. wenn alle Fälle günstig sind, wird dieser Bruch zur Einheit und die Wahrscheinlichkeit zur Gewißheit, so daß also die Einheit gleichsam das Symbol der Gewißheit ist, welcher sich die Wahrscheinlichkeit immer mehr nähert, je größer die Anzahl der günstigen Fälle zu der Anzahl aller möglichen Fälle ist. Man nennt diese die absolute Wahrscheinlichkeit. (Man sehe Anmerkung I. am Ende dieser ersten Abtheilung.)

Von ihr unterscheidet sich die relative Wahrscheinlichkeit, wo von allen möglichen Fällen durch die Natur der Aufgabe einige ausgeschlossen sind. Nennt man w und w' die absoluten Wahrscheinlichkeiten zweyer Ereignisse, so ist die relative Wahrscheinlichkeit, daß das erste dieser Ereignisse eintrete, gleich w dividirt durch die Summen der beyden absoluten Wahrscheinlichkeiten $w + w'$ (II).

Diese beyden Gattungen von Wahrscheinlichkeiten beziehen sich nur auf einzelne Fälle und sie heißen daher einfache Wahrscheinlichkeiten, während alle folgenden, die mehrere dieser Fälle umfassen, zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten genannt werden. Sind nämlich von N möglichen Fällen die absoluten Wahrscheinlichkeiten $w, w', w'', \ldots$ so ist die W., daß irgend einer dieser Fälle eintreffe, gleich der Summe $w + w' + w'' + \ldots$ (III).

Ist ferner w die absolute Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dasselbe in m mal nach einander wiederholten Versuchen immer eintreffe, gleich w^m (IV).

Endlich ist die Wahrscheinlichkeit, daß mehrere Ereignisse,

deren absolute Wahrscheinlichkeiten w, w', w'' . . sind, zugleich eintreffen, gleich w.w'.w''.w''' . . . (V).

Auf diese fünf Classen lassen sich beynahe alle Aufgaben zurückführen, welche man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben hat. Aber es wird zuweilen ein besonderer Scharfsinn erfordert, diese Classen zu unterscheiden und die Nebenbedingungen dieser Aufgaben gehörig zu erfüllen. Eine unmittelbare Folge derselben ist die Lehre von den wechselseitigen Ereignissen, wo man die Wahrscheinlichkeiten sucht, die ein Ereigniß für den Fall hat, daß ein anderes ebenfalls eingetreten oder daß das letzte nicht eingetreten ist (VI). Diese letzten Betrachtungen führen unmittelbar auf diejenigen Wahrscheinlichkeiten, welche den Berechnungen unserer Witwen- und Waiseninstitute zu Grunde liegen. Eine andere Anwendung der vorhergehenden Grundsätze bezieht sich auf die Einrichtung unserer Lotterien, deren Vor- und Nachtheile näher zu kennen vielleicht für viele nicht ohne Nutzen seyn wird (VII Bogen F). In den Anmerkungen sind alle diese Gattungen von Wahrscheinlichkeiten näher angeführt und zur größeren Deutlichkeit mit Beyspielen versehen worden.

Die bisher angeführten Wahrscheinlichkeiten setzen voraus, daß die Anzahl der möglichen Fälle bekannt und eine endliche Größe sey. Allein es gibt noch andere Ereignisse, für welche diese Anzahl der möglichen Fälle entweder unbekannt oder auch unendlich groß ist, und die Wahrscheinlichkeit des Eintretens solcher Ereignisse zu bestimmen, erfordert ganz eigene Betrachtungen. Wir werden sie in der zweyten Abtheilung dieses Werkes, wenigstens in Beziehung auf ihre Anwendung näher kennen lernen. Hieher gehören vorzüglich die Wahrscheinlichkeiten, welche sich auf Beobachtungen oder auf wiederholte Experimente beziehen. Wenn man nämlich den Werth einer oder mehrerer Größen, die man schon aus früheren Versuchen beynahe kennt, genauer bestimmen will, so wird man so viele Beobachtungen, als möglich, zu dieser Bestimmung anwenden und da sonach die Anzahl dieser Beobachtungen gewöhnlich viel größer seyn wird, als

die Anzahl der unbekannten Größen, so wird eine Methode nothwendig, diejenigen Werthe, welche allen diesen Beobachtungen am besten entsprechen, d. h. die wahrscheinlichsten Werthe dieser Größen zu finden. Diese Untersuchungen lassen sich, mit besonderen Modificationen, beynahe auf alle Erscheinungen der Natur, auf die Phänomene der physischen und selbst der moralischen Welt anwenden und sie werden ohne Zweifel, wenn diese Theorie selbst sowohl, als auch unsere ihr zu Grunde liegenden Erfahrungen eine größere Ausbildung erhalten haben, zu den wichtigsten und interessantesten Resultaten führen. Wir wollen es versuchen, in dem Folgenden wenigstens einige derselben näher anzuzeigen.

Mitten unter den höchst veränderlichen und verwickelten, uns aber größtentheils unbekannten Ursachen der Erscheinungen in der Natur, welche Ursachen wir, eben wegen unserer Unkenntniß derselben, mit dem Namen des Zufalls bezeichnen, bemerken wir beynahe ohne Ausnahme, daß die Unregelmäßigkeit derselben in dem Maße abzunehmen scheint, wie sie öfter vorkommen, daß also, wie die Erscheinungen selbst sich multipliciren, eine Art von fester Ordnung in ihnen sichtbar wird, die wir denn auch meistens, vielleicht mit Unrecht, einer Art von, uns übrigens verborgener, Absicht zuschreiben. Um dieses sogleich durch ein Beyspiel deutlich zu machen, wollen wir annehmen, daß eine Urne eine uns ganz unbekannte Anzahl von weißen und schwarzen Kugeln enthalte. Wenn man bey jedem Zuge eine derselben herausnimmt und ihre Farbe bemerkt und sie dann wieder in die Urne zurücklegt, um eine neue Ziehung vorzunehmen, so wird bey den ersten Zügen das Verhältniß der gezogenen weißen Kugeln zu den gezogenen schwarzen sehr veränderlich und unregelmäßig seyn, aber je länger man diese Ziehungen fortsetzt, desto deutlicher wird man ein bestimmtes und constantes Verhältniß dieser beyden Farben sich gestalten sehen, und dieses Verhältniß der gezogenen weißen und schwarzen Kugeln wird dem Verhältnisse der in der Urne enthaltenen weißen und schwarzen Kugeln immer näher kommen, je größer die Anzahl der Ziehungen ist, so daß man endlich mit großer Wahrscheinlichkeit das

wahre Verhältniß der Anzahl der in der Urne enthaltenen weißen sowohl, als auch der schwarzen Kugeln wird bestimmen können, wenn uns gleich anfangs dieses Verhältniß völlig unbekannt gewesen ist. Denken wir uns in einem zweyten Beyspiele eine Reihe kreisförmig aufgestellter Urnen, deren jede eine große Anzahl weißer und schwarzer Kugeln enthält. Das ursprüngliche Verhältniß dieser zwey Gattungen von Kugeln kann noch so verschieden seyn, so daß z. B. mehrere Urnen bloß weiße, und wieder andere bloß schwarze Kugeln enthalten. Zieht man dann eine Kugel aus der ersten Urne und wirft sie in die zweyte; schüttelt man dann die Kugeln der zweyten Urne wohl durch einander und zieht aus ihr eine Kugel, und wirft sie in die dritte u. s. w. bis man die aus der letzten Urne gezogene Kugel wieder in die erste wirft und so das Verfahren mit der ganzen Reihe von Urnen öfter wiederholt, so zeigt die Analyse, daß, je öfter man dieses Verfahren wiederholt hat, desto mehr das Verhältniß der weißen und schwarzen Kugeln in jeder Urne sich dem constanten Verhältnisse der weißen und schwarzen Kugeln in allen Urnen nähern wird. Durch diese einfache Art der Transposition der einzelnen gezogenen Kugeln verschwindet also die anfängliche Unregelmäßigkeit dieses Verhältnisses in jeder einzelnen Urne immer mehr und mehr und geht endlich in eine sehr einfache Ordnung über. Stellt man dann zwischen diese Urnen mehrere andere, deren jede wieder eine willkührliche Anzahl von weißen und schwarzen Kugeln enthält, und wendet man jetzt auf alle diese Urnen das oben erwähnte Verfahren an, so wird zwar anfangs die in den alten Urnen bestehende Ordnung gestört werden und eine Unregelmäßigkeit entstehen, die sich über alle Urnen verbreitet, aus welcher sich aber, wenn man nur jenes Verfahren oft genug wiederholt, sich endlich doch wieder jene Regelmäßigkeit entwickeln wird, indem am Ende doch wieder das Verhältniß der weißen Kugeln zu den schwarzen in jeder Urne, sich dem constanten Verhältnisse der weißen zu den schwarzen Kugeln in allen Urnen, den alten und den neuen, immer mehr nähern wird. Ganz dieselbe Erscheinung hat auch bey allen Ereignissen der Natur statt, in welchen gewisse constante Kräfte regelmäßige Wirkungen erzeu-

gen, die eben dadurch andere, veränderliche Einflüsse mit der Zeit überwiegen und so endlich selbst aus dem Schooße der Unordnung und dem scheinbaren Chaos Systeme entwickeln, deren einfache Regelmäßigkeit so oft der Gegenstand unserer Bewunderung ist. Alle Phänomene, selbst diejenigen, welche am meisten von dem blinden Zufalle abzuhängen scheinen, zeigen also, wenn sie nur oft genug wiederholt werden, jene Neigung, sich immer mehr und mehr einem constanten Verhältnisse zu nähern und sich einem bestimmten, meistens sehr einfachen Gesetze zu unterwerfen, aus welchem Gesetze, wenn es uns einmal mit hinlänglicher Genauigkeit bekannt ist, man dann auch die künftigen Erscheinungen dieser Ereignisse bestimmen wird. Die Ursache dieses merkwürdigen Umstandes ist ohne Zweifel darin zu suchen, daß bey den, jene Erscheinungen erzeugenden Veranlassungen eine oder mehrere regelmäßig wirkende sind, welche mit der Zeit die anderen unregelmäßigen, und sich gleichsam, zum Theil wenigstens, einander selbst aufhebenden Ursachen überwiegen und daher auch in regelmäßigen Wirkungen sichtbar werden. Wenn die Ziehung und die Zurückgabe der Kugeln in dem vorhergehenden Beyspiele nicht in der angeführten einfachen Ordnung statt hätte, sondern wenn man z. B. aus der 1., 4., 9... Urne 3, 5, 8.. Kugeln in die 3., 4., 7... Urne geben würde, so würde auch jene endliche Ordnung der Verhältnisse der beyden Farben nicht statt haben, aber sie würde, wenn gleich vielleicht später, eintreten, wenn man sowohl in der Zahl der zu ziehenden Kugeln, als auch in der Wahl der Urnen irgend ein anderes Gesetz, z. B. das der figurirten Zahlen eintreten lassen wollte.

Diese sonderbare Erscheinung fällt vielleicht nur wenig auf, weil sie selbst bey alltäglichen Versuchen so oft wiederkömmt und weil sie von dem gesunden Menschenverstande gleichsam schon als ein Axiom angenommen wird. Desto schwerer ist es, einen treffenden Beweis derselben durch die Analyse zu geben. Auch that sich Jacob Bernoulli, der zuerst einen solchen Beweis für diese Erscheinung gefunden hatte, nicht wenig darauf zu Gute. Erst in unsern Tagen hat Laplace eine andere und noch vollständigere Demonstration derselben gefunden, die sich aber hier, wo wir

die Analyse vermeiden wollen, ohne Weitläufigkeit nicht gut mittheilen läßt. Aus diesem Theoreme hat man dann die Folgerung gezogen, die man als ein allgemeines Gesetz ansehen kann: daß nämlich die anfangs meistens veränderlich und ganz zufällig scheinenden Verhältnisse aller Naturereignisse sich immer mehr einem gewissen beständigen Verhältnisse nähern, je zahlreicher diese Erscheinungen selbst sind. So sind, ungeachtet der Veränderungen, welche einzelne Jahre hervorbringen mögen, die Anzahl der Geburten oder der Sterbefälle eines Landes oder einer Stadt für einen bestimmten Zeitraum, wenn man sie aus einer größeren Anzahl von Jahren ableitet, immer sehr nahe constant und dasselbe hat auch mit den Erzeugnissen eines Landes statt, so daß die Vorsicht der Menschen sich von der Unregelmäßigkeit der einzelnen Jahre unabhängig machen kann, wenn sie die Güter der Natur, die sie selbst von Jahr zu Jahr oft sehr ungleich auszutheilen scheint, auf mehrere Jahre zu gleichen Theilen zu verbreiten sich bemüht. Selbst die Erscheinungen in der moralischen Welt scheinen sich diesem allgemeinen Gesetze unterzuordnen. So will man sogar die Erfahrung gemacht haben, daß in Paris und London die Anzahl der, wegen unvollständiger Adressen, auf den Posten zurückgebliebenen Briefe, jährlich immer nahe dieselbe ist.

Es scheint daher, daß bey einer längeren Reihe von Ereignissen derselben Art, die Wirkung der regelmäßigen und constanten Ursachen über die der unregelmäßigen eine Art von Übergewicht erhalten.

Die günstigen und glücklicher Weise noch oft genug wiederkommenden Ereignisse, welche die Beobachtung der ewigen und unveränderlichen Gesetze der Vernunft, der Gerechtigkeit und der Humanität zu begleiten pflegen, zeigen uns, dem Einzelnen so gut als ganzen Völkerschaften, daß es immer vortheilhafter ist, sich diesen Gesetzen unterzuordnen, als sich von ihnen zu entfernen. Unsere Weltgeschichte und unsere eigene Erfahrung unterstützt diese Behauptung. Wer kann die glücklichen Folgen der Vereinigungen läugnen, die auf Vernunft und auf die natürlichen Rechte der Menschheit gegründet sind, oder wer kann die

Vortheile verkennen, die Redlichkeit und Treue dem einzelnen Menschen sowohl, als auch ganzen Staaten bringen. Die Opfer, welche ihnen die gewissenhafte Erfüllung ihrer mit den Nachbarn eingegangenen Verträge kostet, werden reichlich ersetzt durch den Vortheil der Achtung, des Vertrauens und der Wohlfahrt, welche die unmittelbaren Früchte jener edlen Selbstbeherrschung sind. Wie lehrreich, wie interessant könnte unsere Weltgeschichte werden, wenn sie aus diesem Gesichtspuncte behandelt werden möchte.

In den meisten Fällen ist uns die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Ereignisse unbekannt, und dann sind wir gezwungen, zu der Vergangenheit zurückzugehen, und in den bereits angestellten Beobachtungen und Erfahrungen eine Anzeige aufzusuchen, die uns in unsern künftigen Erwartungen zu leiten im Stande ist. Gewöhnlich halten wir dann, wie in unsern Spielen, diejenigen Fälle, welche bereits am häufigsten vorgekommen sind, für die wahrscheinlicheren und zwar desto mehr, je öfter sie bereits erschienen sind. So ist, nach unsern Erfahrungen, die Anzahl der Geburten der Knaben zu jener der Mädchen in allen Ländern, wo man bisher solche Untersuchungen anstellen konnte, sehr nahe gleich dem Verhältnisse von 22 zu 21, und dieses Verhältniß scheint von dem Klima und der Lebensart ganz unabhängig zu seyn, so daß man also diese größere Anzahl der männlichen Geburten, so unbekannt uns auch die Ursache derselben seyn mag, als ein Gesetz der Natur betrachten muß.

Wir haben bereits mehrere Beyspiele in dem verwickeltsten Theile der astronomischen Analysis, in der Theorie der gegenseitigen Störungen der Himmelskörper, von dem Nutzen, welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung bey diesen Untersuchungen gewähren kann. Die bekannte Acceleration der mittleren Bewegung des Mondes quälte lange die Geometer des verflossenen Jahrhunderts, da sie ihren wahren Grund nicht finden konnten. Lagrange verwarf endlich, nach vielen mühsamen Rechnungen, die Existenz dieser Acceleration gänzlich, indem er sie für eine Täuschung der Beobachter erklärte. Allein Laplace, der die älteren Beobachtungen, besonders die der Araber, mit denen der neuern Zeiten verglich, fand, daß die Existenz einer solchen Acceleration eine

sehr große Wahrscheinlichkeit habe, und indem er, durch diese Überzeugung bewogen, die Theorie des Mondes noch einmal mit der größten Sorgfalt durchging, fand er glücklich den wahren Grund jener scheinbaren Anomalie in der Veränderung der Excentricität unserer Erdbahn.

Oft ist zwar die wahre Auflösung des Problemes, welches das Gesetz dieser Erscheinungen darstellen soll, über die Kräfte unserer Analysis. Aber auch in diesen Fällen ist es interessant und wichtig, jene constanten Verhältnisse und den Grad der Genauigkeit zu kennen, mit welchem sie von den Beobachtungen dargestellt werden. So mag es vielen immerhin noch als eine Hypothese gelten, daß die Ebbe und Fluth des Meeres eine Wirkung der Anziehung des Mondes und der Sonne sey. Aber die große Übereinstimmung, welche die von Laplace auf diese Hypothese gegründete Theorie jener Erscheinung mit so vielen Tausenden von Beobachtungen gewährt, gibt dieser Hypothese einen Grad der Wahrscheinlichkeit, den viele andere unserer menschlichen Kenntnisse noch weit entfernt sind zu besitzen, wenn sie gleich der Art sind, daß es beynahe Niemand wagt, an ihrer Existenz zu zweifeln.

Es ist wahrscheinlich, daß diese Wirkung der Sonne und des Mondes, die so große Bewegungen in den Gewässern des Meeres erzeugt, auch ähnliche Fluctüationen in unserer Atmosphäre hervorbringen werde. Laplace hat zu diesem Zwecke gegen zwölftausend Beobachtungen des Barometers und Thermometers untersucht, die auf der Sternwarte in Paris gemacht worden sind. Aber er fand die hieher gehörenden Veränderungen des Barometers nur gleich drey Hunderttheilchen einer Linie und die Wahrscheinlichkeit dieses Resultates so gering, daß man es noch als sehr ungewiß betrachten muß. Unter dem Äquator, wo jener Einfluß des Mondes und der Sonne am größten ist, würde sich ohne Zweifel diese Untersuchung mit mehr Sicherheit anstellen lassen.

Eine andere Veränderung des Barometerstandes, die von der Änderung der Temperatur bey Tage und bey Nacht entsteht, und die auch in der heißen Zone am merklichsten ist, zeigt, daß

das Barometer, ungeachtet seiner täglichen Schwankungen, gen 9 Uhr des Morgens am höchsten, und gegen 3 Uhr des Abends am tiefsten steht, während es wieder in der Nacht gegen 11 Uhr am höchsten und gegen 4 Uhr des Morgens am niedrigsten steht. Die Differenz des höchsten und niedrigsten Standes beträgt daselbst oft 0.8 einer Par. Linie. In unsern Breiten sind diese Veränderungen viel kleiner, aber auch hier zeigen die Beobachtungen, daß man mehr als 300,000 gegen die Einheit wetten kann, daß diese Erscheinung von irgend einer regelmäßigen Ursache entstehen müsse. Ohne diese Ursache durch die Analyse nachweisen zu können, da es hier hinreichen mag, ihre Existenz außer Zweifel gesetzt zu haben, sieht man doch, schon aus den Epochen dieser Variationen, die sich nach der Länge des Sonnentages richten, daß der Grund dieser Erscheinungen in der Wärme zu suchen ist, welche die Sonne dem Theile der Oberfläche der Erde und ihrer Atmosphäre ertheilt, den sie mit ihren Strahlen bedeckt.

Auch die bekannten täglichen Variationen der Magnetnadel sind eine Wirkung der Sonne auf die Erde, da ihre Perioden ebenfalls von der Länge des Sonnentages abhängen. Ob aber diese Wirkung auf die Magnetnadel ebenfalls durch die Wärme, welche die Sonne erzeugt, oder ob sie durch den Einfluß dieses Gestirns auf die Electricität und den Magnetismus unserer Erde entsteht, werden erst künftige Beobachtungen entscheiden können.

Eine der merkwürdigsten Erscheinungen unseres Planetensystems besteht darin, daß die rotirenden sowohl als auch die fortschreitenden Bewegungen der Planeten um die Sonne und der Satelliten um die Hauptplaneten durchaus in derselben Richtung, von West gen Ost, und überdieß alle sehr nahe in den Ebenen des Sonnenäquators vor sich gehen. Wir bemerken diese Erscheinung bey sechs Hauptplaneten, bey dem Monde der Erde, bey den vier Monden Jupiters und bey einem Monde Saturns, so wie bey dem Ringe dieses letzten Planeten. Es ist daher sehr wahrscheinlich, daß sie keine Wirkung des bloßen Zufalls ist, sondern daß sie in einer allgemeinen Ursache, welche diese gleichförmigen Bewegungen hervorgebracht hat, gesucht werden muß. Auch zeigt die Analyse, daß man über vier Billionen gegen die Einheit wetten kann,

daß diese Erscheinung nicht dem blinden Ohngefähr zugeschrieben werden kann, und diese große Wahrscheinlichkeit war es, welche Laplace bewog, jene constante Ursache dieses Phänomens aufzusuchen und uns eine der sinnreichsten Erklärungen des Ursprungs unsers Sonnensystems zu geben.

Vielleicht werden uns auch fortgesetzte Erfahrungen bald in den Stand setzen, diese neue Art der Analyse auf den Einfluß anzuwenden, welchen mehrere Naturereignisse auf unsern eigenen Organismus auszuüben scheinen. Die feinsten Instrumente, welche wir zu den Beobachtungen der Natur anwenden können, sind ohne Zweifel unsere Nerven, besonders wenn sie durch irgend einen Zufall in einen höhern Stand der Reizbarkeit versetzt werden. Durch sie hat man die äußerst schwache Electricität entdeckt, welche durch die Berührung zweyer heterogener Metalle erregt wird, und die sonderbaren Erscheinungen, welche eine große Reizbarkeit der Nerven bey einigen Individuen hervorgebracht hat, haben uns den thierischen Magnetismus und den Einfluß der Sonne und des Mondes in verschiedenen Krankheiten kennen gelehrt. Die Wirkungen, welche aus diesen Quellen entspringen, sind ohne Zweifel meistens nur sehr schwach, und sie können daher, von andern Einflüssen gestört, leicht verkannt und noch leichter von einer zu lebhaften Phantasie über ihren wahren Werth geschätzt werden; aber dieß kann noch kein Grund seyn, sie, wie manche gethan haben, ohne alle weitere Untersuchung ganz zu verwerfen. Wir sind noch so weit entfernt, alle Agentien der Natur und die verschiedenen Arten ihrer Wirksamkeit zu kennen, daß es durchaus nicht gebilligt werden kann, die Existenz solcher Erscheinungen bloß aus dem Grunde zu läugnen, weil sie uns bey dem gegenwärtigen Zustande unserer Kenntnisse noch unerklärbar sind. Vielmehr sollen wir sie alle vorurtheilsfrey und parteylos untersuchen und zwar desto genauer untersuchen, je schwerer sie zu erkennen sind, und eben hier wird es besonders wünschenswerth seyn, durch unsere Analyse, wenigstens einigermaßen, den Grad der Wahrscheinlichkeit der auf diese Erscheinungen gestützten Hypothesen beurtheilen zu können.

Bisher haben wir uns mit der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Erscheinungen in der Körperwelt beschäftiget. Indem wir nun zu jenen der geistigen oder moralischen Welt übergehen, müssen wir zuvörderst bemerken, daß hier die wahren Ursachen der Ereignisse gewöhnlich noch verborgener und ihre Wirkungen noch weit verwickelter sind, als in jener, so daß man, bey dem gegenwärtigen Zustande der Analysis sowohl, als auch unserer bisher gesammelten Kenntnisse, wohl nur selten zu ganz bestimmten Resultaten zu gelangen hoffen darf. So viele unvorhergesehene und unvorherzusehende Ursachen wirken auf die einfachsten Handlungen einzelner Menschen und ganzer Staaten ein, daß es oft selbst dem scharfsinnigsten Beobachter unmöglich wird, sie von einander zu trennen und sich bis zu einer klaren Ansicht des Gegenstandes zu erheben. Auch fehlt es uns, selbst im Großen, an hinlänglichen Erfahrungen. Hätte man z. B. in jedem Zweige der öffentlichen Administrationen seit Jahrhunderten die neu eingeführten Experimente und ihre glücklichen oder unglücklichen Erfolge genau aufgezeichnet, so würde man jetzt über den Nutzen oder Schaden dieser Einrichtungen ein bestimmteres Urtheil fällen können. Aber wie wenige allgemeine und vollkommen bewährte Regeln können selbst über diesen so wichtigen Gegenstand angeführt werden. Es scheint uns klar, daß man dem unabweislichen Fortgang des Ganzen der menschlischen Gesellschaft in materieller und intellectueller Hinsicht kein Hinderniß entgegensetzen soll; aber es ist wohl nicht minder gewiß, daß man jede Veränderung im Großen nur mit der äußersten Umsicht vornehmen darf, wenn man nicht auf neue, und oft ganz unbesiegbare Hindernisse stoßen will. Die Vergangenheit kennen wir bereits durch unsere eigenen Erfahrungen: aber die Übel, welche jede Neuerung mit sich führen wird, sind uns noch unbekannt. In dieser Unkenntniß der künftigen Ereignisse schreibt uns die Vernunft und die Analyse Vorsicht und vor allem die Vermeidung jeder h e f t i g e n V e r ä n d e r u n g vor, bey welcher, wie bey einem gewaltsamen Stoße, in der physischen sowohl als in der moralischen Welt immer sehr viel von dem verloren geht, was

man in der Mechanik die lebendige Kraft eines Systems zu nennen pflegt.

Einer der wichtigsten Gegenstände dieser Art ist die Wahrscheinlichkeit der Zeugenaussagen, die besonders die Gerichte in einem hohen Grad interessiren muß. Oft zwar ist es uns unmöglich, auf diesem Wege die gesuchte Wahrheit zu erkennen, da die meistens unbekannte Wahrheitsliebe der Zeugen und andere Nebenumstände den Gegenstand sehr verwickelt machen können. Aber in vielen einfachen Fällen läßt sich doch unsere neue Analyse mit einiger Sicherheit anwenden, und immer wird, auch nur eine genäherte Kenntniß einer Sache einer vagen, auf bloßes subjectives Gutdünken und Meinungen gegründeten Ansicht vorzuziehen seyn (VIII).

Auch die Wahlen und Entscheidungen richterlicher Versammlungen unterliegen dieser neuen Analyse. Sie hängen meistens von der Mehrheit der Stimmen, aber auch von der Einsicht und Unparteylichkeit der Votirenden ab, welche letzte einer Berechnung nur schwer zu unterwerfen seyn wird. Doch gibt es auch hier einige allgemeine Gesetze, die schon der gemeine Verstand vorschreibt und die von jener Analyse bestätiget werden. Wenn z. B. die Versammlung nur wenige Kenntniß von dem zu entscheidenden Gegenstande hat; wenn dieser Gegenstand eine ungewöhnlich genaue Untersuchung erfordert; wenn die Wahrheit, der man auf diese Weise den Sieg verschaffen will, mit allgemein angenommenen Vorurtheilen im Gegensatze ist, wie z. B. in frühern Zeiten bey den Hexenprozessen — dann wird dasjenige Resultat, welches man bloß durch die so beliebte Mehrheit der Stimmen zu erhalten sucht, gewöhnlich falsch seyn, und diese Besorgniß wird desto größer seyn, je größer die Anzahl der Mitglieder ist. Es ist daher nothwendig, daß zahlreichen Versammlungen nur solche Entscheidungen überlassen werden, die der größere Theil der Menschen kennt und übersieht; es ist nothwendig, daß Bildung und Kenntniß der uns zunächst umgebenden Gegenstände so allgemein als möglich verbreitet und daß vor allem diejenige Classe der menschlichen Gesellschaft wahrhaft aufgeklärt werde, die bestimmt ist, über das Schicksal der andern zu ent-

iden oder sie zu leiten, um nicht von Vorurtheilen, falschen
sichten und Unkenntniß der Dinge verführt zu werden. Haben
) selbst die Gebildeten nur zu oft Gelegenheit zu bemerken,
die ersten Ansichten einer Sache trügen und daß die Wahr=
; nicht immer auch zugleich wahrscheinlich ist.

Die sicherste Art, unter mehreren vorgeschlagenen Candida=
einen zu wählen, wäre die, wo jeder Wähler die Namen
'er Candidaten aufschreibt und ihnen diejenigen Zahlen beysetzt,
:che nach seiner Ansicht die Verdienste der Candidaten zu dieser
ihl ausdrücken sollen. Wenn z. B. vier Wähler über drey Can=
iten A, B, C folgende Listen eingeben:

	Erster Wähler.	Zweyter.	Dritter.	Vierter.
A	10	4	3	3
B	5	7	6	7
C	2	3	2	5

hat der erste Candidat 20, der zweyte 25 und der dritte 12
immen, also der zweyte die meisten und der dritte die wenig=
i Stimmen erhalten, daher der zweyte gewählt wird. Wenn
r die Wähler ihre Listen ohne Nummern und nur so abgeben,
; der zuerst stehende Candidat als der würdigste, der zweyte
der nächstwürdige gehalten wird, wenn z. B. jene vier Wäh=
folgende Liste eingeben:

Erster Wähler.	Zweyter,	Dritter.	Vierter.
B	A	C	B
A	B	A	C
C	C	B	A

)enkt man sich von den untersten Candidaten einer jeden Reihe
ufangen, die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 . . beygeschrieben
) verfährt, wie zuvor. In unserem Schema hat A die Zah.
$2+3+2+1=8$, B aber $3+2+1+3=9$ und C
lich $1+1+3+2=7$, also hat B wieder die meisten und
)ie wenigsten Stimmen.

Da aber die Interessen der einzelnen Wähler und viele an
e, dem Verdienste der Candidaten oft ganz fremde Rücksichten,=
Ordnung, welche man durch solche Wahleinrichtungen errei=
n will, leicht stören können, so möchte es am gerathensten s...

im Allgemeinen bey den Wahlen durch absolute Stimmenmehrheit stehen zu bleiben, die wenigstens alle diejenigen Candidaten, welche die Majorität verschmäht, entfernt halten und die daher meistens den eigentlichen Wunsch der ganzen Gesellschaft ausdrückt.

Diejenigen Gesellschaften, welche sich, ihren Institutionen zu Folge, am Ende einer jeden Periode von mehreren Jahren ganz erneuern sollen, werden sicherer gehen, wenn sie in kleinern Perioden eine theilweise Erneuerung vornehmen. Denn die neuen Wahlen hängen immer von den Meinungen ab, welche eben zu der Zeit dieser Wahlen die vorherrschenden sind, und je öfter daher diese Wahlen theilweise vorgenommen werden, desto mehr wird man sich der allgemeinen Meinung des größten Theils der Gesellschaft annähern.

In solchen Gerichten, wo wichtige und schwere Verurtheilungen ausgesprochen werden, müssen offenbar auch die stärksten Gründe für die Existenz des zu strafenden Verbrechens vorausgesetzt werden. Aber jede bloß moralische Überzeugung ist doch nur eine Wahrscheinlichkeit, keine unwidersprechliche Wahrheit, und wir haben selbst bey den scheinbar gerechtesten Richtern bereits zu viele beklagenswerthe Erscheinungen gesehen, um nicht mit der äußersten Vorsicht zu verfahren, besonders bey Todesstrafen, wo Gutmachung und Ersatz eines erst später erkannten Fehlers unmöglich ist. Wenn aber der Richter bey seinen Urtheilen eine mathematische Gewißheit fordert, so wird er beynahe nie im Stande seyn, ein Urtheil zu fällen, und doch ist diese Fällung durch die Gefahr geboten, der bey der Ungestraftheit des Verbrechens die Gesellschaft ausgesetzt wäre. Man muß sich daher begnügen, wenigstens so starke Beweise des von dem Beklagten begangenen Verbrechens zu haben, daß die Gesellschaft der übrigen Mitbürger weniger zu fürchten hat, wenn der Beklagte unschuldig verurtheilt wird, als wenn er, schuldig freygesprochen, durch seine künftigen Attentate und durch das Beyspiel, das seine Ungestraftheit ähnlichen Verbrechern gibt, den Staat in neue Gefahren setzt. Die Auflösung dieser Aufgabe hängt aber von vielen Nebenumständen ab, die oft schwer zu erkennen seyn werden. Beynahe

immer wird es unmöglich seyn, den Grad der Wahrscheinlichkeit des Verbrechens, der zu einer Verurtheilung nöthig ist, mit Gewißheit anzugeben. Jeder Richter wird, in dieser Beziehung, seinem innern Gefühle folgen müssen, das durch die Kenntniß der Gesetze und der Menschen, durch Umsicht, Scharfsinn und endlich durch viele vorhergegangene Erfahrungen bey ähnlichen Fällen bestimmt und unterstützt wird. Die Auflösung jenes Problemes hängt auch von der Größe der Strafe ab, welche der Verbrecher erleiden soll. Ohne Zweifel werden die Beweise für Todesstrafe eines ganz anderen Gewichts seyn müssen, als die für ein Gefängniß von einem oder einigen Jahren. Die Strafe muß überdieß dem Verbrechen angemessen seyn, und schwere Strafen auf leichte Verbrechen gesetzt, tragen nur dazu bey, viele Schuldige ganz frey zu sprechen. Das Product der Wahrscheinlichkeit, daß das Verbrechen in der That begangen worden ist, in die Größe dieses Verbrechens ist das Maß der Gefahr, welches aus der Freysprechung des Schuldigen für die Gesellschaft entstehen kann.

Welches ist aber die Wahrscheinlichkeit, daß ein solches Urtheil, wenn es durch die Mehrheit der stimmenden Richter ausgesprochen wird, in der That gerecht ist? Die Majorität einer einzigen Stimme in einem zahlreichen Tribunale zeigt an, daß der Gegenstand, um den es sich handelt, noch sehr zweifelhaft und daß daher in diesem Falle die Verurtheilung des Angeklagten den Gesetzen der Humanität, dieser Beschützerinn der Unschuld, entgegen ist. Die Totalität aller Stimmen im Gegentheile gibt eine sehr große Wahrscheinlichkeit, daß die ausgesprochene Sentenz gerecht ist. Aber diese Totalität als nothwendige Bedingung einer schweren Strafe aufzustellen, geht eben so wenig an, da dann ohne Zweifel zu viele Schuldige ungestraft bleiben würden. Man muß daher, um diese beyden Extreme zu vermeiden, entweder die Anzahl der Richter vermindern, wenn man ihre Unanimität als Basis der Verurtheilung aufstellt, oder man muß, bey einer größeren Anzahl von Richtern, auch die Majorität der Stimmen vergrößern, die zu einem Urtheile erfordert werden.

Wenn in einem Tribunal von 101 Richtern 51 der einen,

und 50 der entgegengesetzten Meinung sind, so ist offenbar die Wahrscheinlichkeit, daß die Meinung eines jeden dieser Richter, alle gleich gerecht vorausgesetzt, die wahre sey, nahe gleich $\frac{1}{2}$ d. h. nahe der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils gleich, daß nämlich seine Meinung nicht die wahre sey. Sind sie aber alle derselben Meinung, so ist jene Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen Richters nahe gleich der Einheit oder der Gewißheit. Außer diesen beyden Extremen kann nur die Größe des Verhältnisses der einen Stimmen über die andern entscheiden, und dieses Verhältniß kann von $\frac{1}{2}$ bis 1 wachsen. Wenn in einem Tribunale von 8 Richtern 5 Stimmen zur Verurtheilung des Angeklagten erfordert werden, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Sentenz ungerecht ist, größer als $\frac{1}{4}$. Sind nur 6 Richter und werden 4 Stimmen erfordert, so ist jene Wahrscheinlichkeit kleiner als $\frac{1}{4}$. Der Angeklagte geht daher bey dieser Reduction der Richterzahl sicherer. In beyden Fällen ist die Majorität der Stimmen um 2 größer, da in dem ersten Falle für die entgegengesetzten Meinungen 5 und 3 und in dem zweyten Falle 4 und 2 Stimmen waren. So lange diese Majorität immer dieselbe bleibt, wird die Wahrscheinlichkeit eines fehlerhaften Urtheils immer größer, je größer die Anzahl der Richter ist, welches auch diese Majorität der Stimmen ist, wenn sie nur immer dieselbe bleibt. So werden in unserm Beyspiele zur Fällung eines Urtheils bey einem Tribunale von bloß zwey Richtern 2 für und keiner gegen die Strafe, also die Totalität der Stimmen erfordert. Im Gegentheile müßten bey einem Tribunale erfordert werden

von Richt.	für die Strafe	u. f. die Losspr.	Stim., Verhältn.
4	3	1	3
6	4	2	2
8	5	3	1.67
10	6	4	1.50
50	26	24	1.08
100	51	49	1.04
1000	501	499	1.004

Diese Tafel zeigt, daß sich das Verhältniß der positiven Stimmen zu den negativen, je größer die Anzahl der Richter wird, desto mehr der Gleichheit nähert, bis endlich für ein sehr

zahlreiches Tribunal beyde sehr nahe gleich werden und die Hälfte der Richter für, die Hälfte aber gegen die Strafe ist, wodurch das Resultat ganz unentschieden bleibt. Daßselbe wird der Fall seyn, wenn auch die Majorität der Stimmen statt 2 irgend eine größere Zahl wäre: so daß also die Besorgniß eines unrichtigen Urtheils und daher auch die Unsicherheit des Angeklagten desto größer wird, je größer die Anzahl der Richter ist. Ist diese Majorität z. B. 10, so hat man für ein Tribunal

	Bejahende.		Verneinende.
von 10 Richtern	10	. . .	0
20 „	15	. . .	5
30 „	20	. . .	10
100 „	54	. . .	45
1000 „	505	. . .	495

also wieder diese Annäherung des Verhältnisses zur Einheit zwischen den bejahenden und den verneinenden Stimmen.

Im Gegentheile, wenn man, statt dem arithmetischen, das geometrische Verhältniß für die Majorität festsetzt, so wird die Sicherheit des Urtheils immer desto größer, je größer die Anzahl der Richter ist. Wird z. B. angenommen, daß das Urtheil nur vollzogen werden kann, wenn zwey Drittheile der Richter für die Strafe stimmen, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Irrthums bey 6 Richtern nahe $\frac{1}{4}$, und bey zwölf Richtern wird diese Wahrscheinlichkeit beträchtlich kleiner. So hat man unter dieser Voraussetzung bey einem Tribunale

	Bejahende.		Verneinende.
von 5 Richtern	3	. . .	2
10 „	6	. . .	4
20 „	12	. . .	8
50 „	30	. . .	20
100 „	60	. . .	40
1000 „	600	. . .	400 u. s. w.

Überhaupt ist die Wahrscheinlichkeit einer fehlerhaften Sentenz gleich 0.254, wenn 5 Stimmen von 8 zur Verurtheilung hinreichen; aber nur mehr 0.133, wenn 8 Stimmen von 12 hinreichen; sie ist 0.045, wenn 9 Stimmen von 12 erfordert wer-

den, und sie ist endlich nur 0.00012, wenn die Totalität aller zwölf Richter zur Ausführung des Urtheils erfordert wird, wie dieses letzte der Fall bey den englischen Jurys ist; sie ist endlich nahe 0.001, wenn von einem Tribunale von 9 Mitgliedern die Totalität aller Stimmen gefordert wird (IX).

Das geistige Auge des Menschen hat ohne Zweifel eben so seine Illusionen, wie das körperliche; die letzten suchen wir durch das Gefühl, und jene durch Reflexion und Rechnung zu berichtigen. Unsere Leidenschaften und Vorurtheile, unsere herrschenden Meinungen lassen uns die Vortheile mancher Unternehmungen wie in einem Hohlspiegel vergrößert sehen, und setzen uns den gefährlichsten Folgen aus. Gegenwärtige Leiden und die Ursachen, welche sie erzeugen, drücken uns viel mehr, als vielleicht viel größere, aber künftige Übel, die wir uns oft eben durch die Mittel zuziehen, durch welche wir jene zu entfernen suchen. Und nicht nur der Einzelne, auch ganze große Völkerschaften handeln nur zu oft auf dieselbe Weise, indem sie sich der Anarchie und dem Despotismus übergeben, nur um sich von dem lästigen Übel der Gegenwart zu befreyen. Wir haben oben gesehen, wie nachtheilig das Spiel der Lotterie für diejenigen ist, welche sich ihm anvertrauen. Aber es ist sehr zu besorgen, daß selbst viele von denen, welche diese Nachtheile kennen, sich von ihren eitlen Hoffnungen doch nicht abhalten lassen. Die bloße Möglichkeit, mit einer kleinen Summe ein großes Vermögen zu erwerben, so äußerst gering auch die Wahrscheinlichkeit eines glücklichen Erfolges seyn mag, ist so lockend, daß der Arme sein Letztes hinträgt, um wenigstens einige Tage sich in trügerischen Hoffnungen zu wiegen und dann sich der Noth und dem Mangel auszusetzen. Diese Träume, denen er sich überläßt, bedürfen um so weniger einer Widerlegung, da sie sich gegenseitig selbst zerstören. So setzen viele Arme ihr ganzes Vermögen auf eine einzige Zahl, weil diese schon so lange nicht herausgekommen ist, und eben so viele vertrauen ihr Glück einer andern, die schon mehrmal nach einander gezogen worden ist und daher, nach ihrer Meinung, nächstens wieder

gezogen werden muß; aller übrigen Vorurtheile nicht zu gedenken, die mit dem armen, betrogenen Menschen ihr loses Spiel treiben.

Oft führen wir sogar selbst die sonderbaren und unerklärlichen Zufälle herbey, wegen welchen wir dann sehr mit Unrecht das Schicksal anklagen, das uns und unsere Unschuld verfolgen soll. So sucht man in den Spielen, die zum Theil von dem Zufalle, zum Theil aber auch von der Geschicklichkeit des Spielers abhängen, wenn man durch eine längere Zeit verloren hat, seinen Schaden durch gewagte Sätze, die selten ohne Leidenschaft unternommen werden, wieder gut zu machen, wodurch man gewöhnlich nur das Unglück vermehrt und dadurch, weit entfernt, seine eigene Schuld anzuerkennen, in noch heftigere Klagen gegen die Ungunst und die Ungerechtigkeit des Schicksals ausbricht. Welches Recht haben wir denn, von diesem Schicksale ausschließende Gunstbezeigungen auf Kosten der andern zu fordern? Wir lächeln über die Chinesen, die ihr himmlisches Reich für den Mittelpunct der Welt halten, während die meisten von uns, wenn sie es auch nicht immer offen gestehen, doch desto inniger heimlich glauben, daß sie selbst und ihr liebes Ich ein ähnlicher Mittelpunct sind, für welchen die Natur eine ganz besondere Sorgfalt tragen, für welchen das Schicksal ganz besondere Verbindlichkeiten hegen, ja für welchen die Götter selbst von ihren Thronen steigen und ihm zu Liebe den Lauf und die Gesetze des Universums ändern sollen. Und wer von uns nicht thöricht genug ist, in seinen ruhigen und nüchternen Stunden, in den Stunden seiner Zufriedenheit und seines Glückes, solche ausschweifende Forderungen an die höheren Mächte zu machen, wird sich doch, wenn das Unglück ihn ereilt oder bange Besorgniß vor der düstern Zukunft sein Herz beengt, unter den Schutz derselben Anmaßungen zu flüchten suchen, die er früher an andern so tadelnswerth gefunden hatte. Diese Meinungen, von denen sich nur die wenigsten und vielleicht keiner ganz frey zu halten weiß, können oft sehr vortheilhaft, oder doch für ihren Bekenner sehr trostreich seyn, aber sie können eben so oft traurige Folgen haben, und sie sind, wie die Erfahrung und die ganze Menschengeschichte lehrt, den

größten Mißbräuchen ausgesetzt, welche zu allen Zeiten von denjenigen benützt worden sind, denen es darum zu thun war, die andern als Mittel zu ihren eigenen Zwecken zu gebrauchen.

Illusionen jeder Art, so nützlich sie auch zuweilen dem Einzelnen seyn mögen, sind dem Ganzen immer schädlich: die Wahrheit aber allein ist immer und allen nützlich. Aber an welchen Merkmahlen sollen wir sie erkennen? — Wer diese Frage löst, wird der größte Wohlthäter der Menschheit heißen, selbst den betrübenden Fall nicht ausgenommen, daß seine Lösung des Problemes dahin führt, daß uns die reine, nackte Wahrheit ewig verborgen bleiben und daß wir bestimmt sind, sie immer nur, so oft wir uns ihr von Ferne nähern, unter dem trügerischen Gewande der Täuschung zu erblicken. Die wenigen eigentlich mathematischen Wahrheiten ausgenommen, wie viele haben wir noch, von denen, vollkommen überzeugt zu seyn, wir uns rühmen dürfen? Von denen wir dieß glauben, welchen Beweis für die Rechtmäßigkeit dieses Glaubens können wir angeben? — Keinen besseren, als den, daß Tausende mit uns dasselbe glauben. Allein wie viele Dinge sind beynahe allgemein durch mehrere Jahrhunderte, ja durch Jahrtausende geglaubt worden, die demungeachtet falsch waren.

Wir haben daher allen Grund, uns vor den Täuschungen der Einbildungskraft wenigstens so weit, als es uns möglich ist, zu hüten, und überall, so viel wir können, nur den Eingebungen der gesunden und nüchternen Vernunft zu folgen. Zu viele Beyspiele, selbst der ausgezeichnetsten Menschen, rufen uns diese Warnung zu und sogar die Mathematiker, in ihrer Wissenschaft selbst, die doch allen Täuschungen fremd seyn sollte, vermochten nicht immer, diese gefährliche Klippe zu vermeiden. Wenn man die Einheit durch die Größe $1 + x$ dividirt, so erhält man bekanntlich die Reihe $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$ Nimmt man in dieser Reihe die Größe $x = 1$ an, und summirt man je zwey nächste Glieder derselben, so erhält man $\frac{1}{2} = 0 + 0 + 0 + \ldots$ woraus zu folgen scheint, daß eine unendliche Anzahl von Nullen der endlichen Größe $\frac{1}{2}$ gleich ist.

Der bekannte Geometer Guido Grandi stellte im Anfange

des achtzehnten Jahrhunderts diese Behauptung im vollen Ernste auf, und gerieth darüber in einen vieljährigen, heftigen Streit mit Marchetti, der diesen Satz für die Theologie sehr gefährlich hielt, da Grandi daraus die Schöpfung der Welt aus Nichts erklären wollte. Der große Leibnitz, der seiner lebhaften Einbildungskraft zuweilen mehr nachgab, als man es von einem Geiste seiner Art und von einem Mathematiker erwarten sollte, suchte die Sonderbarkeit jener Behauptung zu retten, indem er bemerkte, daß diese Reihe entweder Null oder die Einheit gebe, je nachdem man eine gerade oder eine ungerade Anzahl von den Gliedern derselben summire, und da bey einer unendlichen Anzahl von Gliedern der Unterschied zwischen Gerade und Ungerade verschwinde, so müsse man in diesem Falle, nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit, das Mittel jener beyden Resultate 0 und 1, oder mit andern Worten, man müsse die Größe $\frac{1}{2}$ für die wahre Summe dieser unendlichen Reihe annehmen. Ein offenbar falscher Schluß, da die Entwicklung des Bruches $\frac{1+x}{1+x+x^2+\ldots}$ ebenfalls die Reihe $1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 -$ und daher, wenn $x = 1$ ist, $0 + 0 + 0 + = \frac{2}{3}$ und nicht $\frac{1}{2}$ gibt, wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung nach Leibnitz fordern soll. Die einfache Erklärung dieses Paradoxons ist heute zu Tage zu allgemein bekannt, um hier noch umständlich angeführt zu werden. — Derselbe Leibnitz glaubte in seiner Diatik, in welcher er alle Zahlen durch zwey Ziffer 0 und 1 darstellte, ein getreues Bild der Schöpfung zu erblicken, in welchem er den Schöpfer als die Einheit und das Nichts als das Zero darstellte, und diese Idee gefiel ihm so sehr, daß er sie dem Jesuiten Grimaldi, Präsidenten des mathematischen Tribunals in China, zuschickte, in der Hoffnung, durch dieses Emblem der Schöpfung den Beherrscher und alle Bewohner jenes Landes zu der Annahme des christlichen Glaubens zu bewegen. So weit können Vorurtheile und Illusionen der Einbildungskraft selbst solche Männer verleiten, wenn sie sich den Anlockungen derselben ohne Rückhalt hingeben.

Wir alle sind geneigt zu glauben, daß die Ordnung, welche wir selbst in der Aufeinanderfolge der Erscheinungen der Na-

tur in unsern Tagen bemerken, von jeher bestanden habe und ohne Unterbrechung immer so dauern werde. Ohne Zweifel würde wohl auch der gegenwärtige Zustand der Dinge, wenn er dem vergangenen vollkommen gleich wäre, auf eine eben so unveränderliche Zukunft schließen lassen. Viele Dinge scheinen uns diese Beständigkeit in unserm Sonnensysteme anzudeuten. Selbst die Analyse hat es bereits bestätiget, daß die rotirende sowohl als die progressive Bewegung der Planeten und der Satelliten und die Lagen ihrer Bahnen sowohl als ihre Äquatoren keinen fortgehenden Änderungen, sondern nur periodischen Ungleichheiten unterworfen sind, die, meistens in sehr engen Gränzen eingeschlossen, sich zu verschiedenen Epochen wieder in ihre erste Lage herstellen. Es kann als bewiesen angenommen werden, daß seit den Zeiten Hipparchs d. h. seit nahe 2000 Jahren, die Länge unseres Sterntages nicht um einen Hunderttheil einer Secunde und die mittlere Temperatur der Erde nicht um den hundertsten Theil eines Grades Reaum. sich geändert habe. Aber die Ordnung mancher andern Erscheinungen der Natur kann doch noch immer großen Änderungen unterworfen seyn, ohne daß unsere bisherigen Beobachtungen oder unsere Rechnungen sie uns anzuzeigen im Stande sind. Die Wirkungen des Oceans, der Atmosphäre, der Meteore, der Erdbeben und der vulkanischen Ausbrüche äußern ihre immerwährenden Einflüsse auf die Oberfläche der Erde, und diese Einflüsse können vielleicht die Temperatur unserer Klimate, das Volumen unserer Atmosphäre und die Verhältnisse der Luftarten, aus denen sie besteht, allmählig wenigstens, ändern und dadurch endlich für den vegetabilischen und animalischen Theil der Bewohner der Erde einen ganz andern Zustand heraufführen. Die Instrumente und die Beobachtungsmethoden, durch welche wir zur Kenntniß dieser Änderungen gelangen, sind alle noch zu neu, um über diesen Gegenstand einen bestimmten Ausspruch wagen zu können.

Eine längere Reihe von Jahrhunderten wird uns vielleicht in den Stand setzen, diese für alle organischen Wesen sehr wichtigen Ereignisse näher kennen zu lernen. Bereits sind mehrere unbezweifelte Spuren einer früheren, von der gegenwärtigen

sehr verschiedenen Welt aufgefunden worden, und die Eingeweide der Erde, so wie die höchsten Gipfel unserer Berge zeigen uns die Trümmer einer Pflanzen- und Thierwelt, die in den früheren Revolutionen der Erde untergegangen und einer neuen, von jener ganz verschiedenen, Organisation ihre Stelle abgetreten hat. Mit welchem Rechte sollten wir auch diese Unveränderlichkeit ihres Daseyns für unsere Erde erwarten, da wir sie nicht einmal an den Körpern des Himmels erblicken, wo neue Sterne entstehen und ganze große Welten verschwinden, und wo allein schon der Widerstand des Lichts und des Äthers, in welchem sich jene Körper bewegen, in der Folge der Zeit große Änderungen in der Anordnung des Ganzen heraufführen muß.

Besonders hat die den Menschen natürliche und vielleicht seiner intellectuellen Organisation, eigenthümliche Begierde, in die Zukunft zu dringen, zu einer großen Anzahl von oft sehr abenteuerlichen Mitteln geführt, durch welche wir diesem unbeweisbaren Wunsche zu genügen suchen. Die Astrologen, die Zauberer, die Hexen und Traumdeuter liefern uns nur zu viel Beyspiele von den traurigen Verirrungen, denen sich nicht bloß der Einzelne, sondern ganze Völkerschaften, durch mehrere Jahrhunderte ohne Anstand und mit einer Hartnäckigkeit hingegeben haben, die weder die Vernunft, noch selbst tausendmal von dem Gegentheile gemachte Erfahrungen zu besiegen vermochten. Diese Vorurtheile verbittern unser Leben, sie halten uns in beständiger Furcht, sie verfolgen uns selbst bis in unsere Träume — aber alles dieß vermag nichts über das arme Menschengeschlecht, das sich willig allen Qualen Preis gibt, um dadurch seine Lust zu befriedigen, in der dunklen Zukunft zu lesen und das Unmögliche möglich zu machen. Den Grund einer so betrübenden und so allgemeinen Erscheinung müssen wir wohl in der inneren Einrichtung unseres Wesens selbst, in der geistigen Physiologie suchen, die dort anfängt, wo unsere materielle Physiologie aufhört, und die ohne Zweifel, so wie diese, bestimmten Gesetzen unterworfen ist, deren nähere Kenntniß für uns selbst nicht anders als höchst interessant seyn kann. Die Nerven unseres Organismus vereinigen sich in ihren letzten und feinsten Verästungen

beynahe alle in der sogenannten Marksubstanz des Gehirns, und führen daselbst die Eindrücke zusammen, welche sie durch die äußeren Sinne von den Gegenständen erhalten haben. Aber diese Sinne selbst lehren uns nichts, und alle bisher gewagten Versuche des menschlichen Scharfsinnes lassen uns im Dunkeln über die Art, auf welche jene äußeren Eindrücke fortgeführt und dem eigentlichen Denkvermögen mitgetheilt werden. Vielleicht werden die Versuche unserer Nachfolger glücklicher seyn, wenn sie einmal die hiehergehörenden Erscheinungen im Großen aufgefaßt und von den übrigen deutlicher unterschieden haben werden. Eine solche scheint jene geistige Sympathie oder der Trieb zu seyn, sich mit gleichartigen oder gleichgestimmten Wesen in nähere Verbindung zu setzen. Wir bemerken diesen Trieb bey allen organischen und selbst gewissermaßen bey den unorganischen Wesen. Zwey Pendel oder zwey Uhren, deren Gang nur wenig verschieden ist, erhalten endlich, wenn sie auf derselben Unterlage ruhen, einen ganz gleichen Gang. Gespannte Saiten, wenn eine derselben tönt, geben die verwandten Töne wieder. Thiere, verschiedener Gattung, aber von ähnlicher Organisation, streben nach Vereinigung. Viele von ihnen bilden sich von selbst in Gruppen und Heerden und das starke Band der Familienverbindungen scheint sich selbst über viele Geschlechter der Pflanzen zu erstrecken. Die menschlichen Vereinigungen zu größeren Gesellschaften und zu ganzen Staaten haben ohne Zweifel denselben Ursprung. Wie in der Ehe, wie in der Kinderliebe, so sehen wir auch in jenen Gesellschaften, daß der stärkere Geist dasselbe innige Vergnügen in der Leitung und Beschützung des schwächeren findet, welches dieser in der Hingebung und in dem Gehorsam gegen jenen genießt. Verwandte Gefühle und Empfindungen, in einem Kreise mehrerer Menschen erregt, verstärken sich durch gegenseitige Mittheilung, wie wir täglich in unsern Schauspielen sehen. Die Lust, die aus diesen Mittheilungen entspringt, ist oft so mächtig, daß sie zur Begeisterung, ja selbst zum Fanatismus führen kann, der alle Gemüther bis zu einer Art von Wuth erhitzt und indem er sich mit einer unwiderstehlichen Kraft verbreitet, wahrhaft entsetzliche Wirkungen hervorbringt, wie unsere Geschichtbücher

bezeugen. Es ist möglich, daß die oft eben so unbesiegbare Sympathie, die die Muskeln unseres Gesichtes verzieht, wenn wir einen andern lachen oder gähnen sehen, aus derselben Quelle entspringt, die jene Erscheinungen hervorbringt. Unsere Augenlieder schließen sich schnell und unwillkührlich, beynahe noch ehe die Wirkung unsers Willens sie ereilt, vor einer plötzlich auffallenden Gefahr, und wir machen die Bewegung des Ausweichens vor einem uns begegnenden Hindernisse, wenn wir gleich noch weit von ihm entfernt sind, ja selbst zuweilen schon bey der bloßen Erzählung einer ähnlichen Begebenheit. Warum ist es manchen Menschen gefährlich, auf einem schmalen Stege oder auf einem Brete zu gehen, das über einen Fluß oder einen Abgrund gelegt ist, während derselbe Mensch keinen Anstand nimmt, es zu betreten, wenn es auf ebenem Boden liegt? Manche andere, wenn sie in einer solchen Lage, oder auf der schmalen Mauer eines hohen Gebäudes stehen, fühlen ein beynahe unwiderstehliches Verlangen, sich von derselben herabzustürzen, obschon sie sich zugleich vor den Folgen eines solchen Sturzes entsetzen.

Die Erzählung großer und edler Thaten erregt nicht nur die Begeisterung, sondern auch den Trieb der Nachahmung, besonders bey jungen Gemüthern, die für alle Eindrücke noch empfänglicher sind. Andere, weniger glücklich organisirte Menschen, werden von Criminal- und Räubergeschichten zu einer ähnlichen Nacheiferung angereizt, und in dieser Beziehung ist die Bekanntmachung solcher Geschichten schon oft schädlich geworden. Hieher gehört auch jene geheimnißvolle Verbindung der äußeren Gegenstände und ihrer inneren Eindrücke, durch welche wir, wenn wir nur einen derselben erfassen, sogleich auch alle übrigen, die mit jenen das erstemal sich gemeinschaftlich dargestellt haben, wieder zurückrufen, und wir haben vielleicht sehr Unrecht, diese Erscheinung bloß dem Gedächtnisse zuzuschreiben.

Der Eindruck, welchen wir nur durch einen einzigen unserer Sinne erhalten, ist gewöhnlich von demjenigen sehr verschieden, der durch die Zusammenwirkung mehrerer Sinne entsteht. Der Staarblinde macht sich gleich nach der Operation gewiß eine

ganz andere Vorstellung von den ihn umgebenden Gegenständen, so lange er sie bloß sehen kann, als wenn er später dieselben Eindrücke auch durch den Sinn des Gefühls verdeutlicht und berichtiget hat. Das Bild, welches jene Gegenstände auf der Netzhaut seines Auges entwerfen, bleibt immer dasselbe, aber das innere Bild, welches sich die Seele von jenem äußern Bilde des Auges macht, ist durch diese Berichtigung der übrigen Sinne ein anderes geworden. Wir alle haben wahrscheinlich in den ersten Jahren unserer Kindheit die Eindrücke unseres Gesichtes auf eine ähnliche Weise durch das Gefühl berichtigen müssen, und wir sehen später nur, wie uns früher dieses Gefühl zu sehen gelehrt hat. Wo aber dieser letzte Sinn nicht hinreicht, bleiben viele durch ihr ganzes Leben im Dunkeln. So können sich nur wenige überzeugen, daß die Gestirne des Himmels, weil sie sie nicht mit ihren Händen erreichen können, in der That in einer unermeßlichen Entfernung von uns abstehen. Zwey leuchtende Kugeln von gleichem Durchmesser, aber in ungleicher Entfernung von uns, werden uns in der Nacht ungleich groß erscheinen; sobald aber die Sonne über ihnen aufgeht und auch die zwischenliegenden Gegenstände beleuchtet, wird sofort, in unserem Geiste, die nähere verkleinert und die anderen vergrößert, bis beyde, in unserer Schätzung, als nahe gleich große Kugeln erscheinen. So erscheint uns derselbe Mensch in der Entfernung von fünf oder von zehn Klaftern gleich groß, obschon in der That das Bild desselben auf der Retina unseres Auges in dem einen Falle noch einmal so groß ist, als in dem anderen. Aus einem ähnlichen Grunde erscheint uns der Mond in der Nähe des Horizonts, wo so viele Zwischengegenstände ihn von uns trennen, größer, als im Zenithe, obschon er in der That, wie unsere Messungen zeigen, im Zenithe größer ist. Eben so erscheint uns eine Spinne, die sich nahe vor unserem Auge von dem Zweige eines Baumes herabläßt, auf dem ersten Bilde in der Größe eines Vogels, aber wie man die Verbindung derselben mit dem Zweige erkennt, wird auch sofort der erste Eindruck jenes Bildes auf seine wahre Größe reduzirt. Alle diese und ähnliche Phänomene lassen sich weder, wie einige geglaubt haben, durch ihre Zurückführung

auf die Operationen der Urtheilskraft, noch auf die des Gedächtnisses vollständig erklären: sie gehören jener geistigen Physiologie oder jener Psychologie an, von der wir oben gesprochen haben, und deren Gesetze für uns noch größtentheils im Dunkeln liegen.

Eine entfernte Schrift, die wir durchaus nicht lesen können, wird sofort lesbar, wenn ein anderer die Worte derselben ausspricht: das innere Bild, wenn ich so sagen darf, steigt über den äußern Eindruck des Auges herauf, und erleuchtet und berichtiget denselben. Die unverständliche Stimme eines Schauspielers wird vollkommen verständlich, wenn man die Worte liest, die er so eben declamirt, ja oft schon, wenn man durch ein Glas die Gesichtszüge des Sprechenden deutlicher sieht. Aus demselben Grunde erscheinen uns ganz gewöhnliche Gegenstände im Dunkeln oder im Zwielichte unter den seltsamsten Gestalten und der Schrecken, den ihr Anblick erregt, erweitert sie oft bis zum Entsetzlichen. In diesem gereizten Zustande, oder auch bey einer Krankheit dieses innern Sinnes, werden die Eindrücke desselben oft viel lebhafter, als die des äußern Sinnes: denn, hält man diese Erscheinungen der Einbildungskraft für wirkliche Gegenstände, so wird man ein Geisterseher, ein Visionär, der im wachenden Zustande träumt. Diese krankhaften Affectionen irgend eines jener innern Organe liegen ohne Zweifel auch den Mondsüchtigen zu Grunde. Während ihrer Träume ist vielleicht einer ihrer äußern Sinne, z. B. der des Gefühls, nicht völlig eingeschlafen, er ist noch empfänglich für äußere Eindrücke, die, auf seinen innern Sinn fortgeführt, seine Träume modificiren und selbst seine körperlichen Bewegungen im Schlafe leiten.

Oft glauben solche Kranke die Stimmen fremder Personen zu hören oder sie selbst vor sich zu sehen. In den Gegenden an der Nordseite des kaspischen Meeres hat diese Krankheit eine Art von epidemischem Charakter: sie befällt oft ganz gesunde Personen, führt aber meistens, wenn sie länger dauert, zum Tode. Bonnet erzählt von seinem Großvater, einem Greise voll von Gesundheit, daß er solche Erscheinungen in Menge hatte, an denen er sich selbst ergötzte, nachdem er bemerkt hatte, daß sie keinen nachtheiligen Einfluß auf seine Gesundheit äußern. Die

ähnlichen Visionen eines noch lebenden berühmten Staatsm
sters mit dem grünen Manne sind allgemein bekannt.

Die Geschichte solcher Personen, mit unparteyischer W
haftigkeit erzählt, würde nicht minder interessant seyn und
eben so wichtige Aufschlüsse über jenen innern Menschen geb
als die Darstellung unseres Lebens im Schlafe und während
Träumen. Gewiß liegt hier noch vieles verborgen, das uns
ßere Aufklärungen über uns selbst geben könnte, als wir von
unfruchtbaren Feldern erwarten dürfen, auf welchen sich bi
unsere Psychologen und Metaphysiker herumgetrieben haben, A
klärungen, zu welchen uns vielleicht eine genauere Beobacht
des in unsern Zeiten so viel besprochenen thierischen Magn
mus die Bahn öffnen könnte.

Selbst in denjenigen Operationen jener innern Organisat
die wir ganz dem eigentlichen Gedächtnisse zuzuschreiben pfleg
liegt noch viel Geheimnißvolles, das einer genaueren Unt
chung würdig ist. Wer hat nicht schon die höchst sonderbaren i
ren Bewegungen gefühlt, die wir gleichsam unwillkührlich
nehmen, wenn wir uns an einen Namen oder an eine S
erinnern wollen, die uns nur zum Theil entschwunden ist
deren Benennung, wie man zu sagen pflegt, uns auf der Zu
liegt. Es ist, als ob man das verloren Geglaubte nicht in
ganzen Kopfe, sondern nur in einem Theile, in einem besti
ten Winkel desselben suchte, etwa wie man eine in einem K
verlegte Schrift nur in gewissen Fächern desselben sucht, wo
einer gewissen unerklärbaren Ahnung zu Folge, liegen
Eindrücke der frühesten Jugend erhalten sich oft bis in das s
ste Alter, und sind selbst dann noch lebhaft, wenn die
männlichen Jahre schon längst wieder verschwunden sind.
scheint, als ob jene ersten Eindrücke, die sich so tief in u
Gedächtniß gegraben haben, nur die Zeit der Reife der spät
abwarten wollten, um dann mit ihrer ganzen jugendlichen Fr
wieder hervorzutreten, so wie die Gestirne, wenn das Lich
Sonne für uns erlischt, mit neuem Glanze aus dem Dunkel
Nacht hervorbrechen. Warum behält man die Dinge, die
am Abend eines Tages gehört oder gelernt hat, am sichers

Warum vergißt man im Gegentheile jene am leichtesten, die man, etwa aus einem Buche, unmittelbar vor dem Einschlafen erhalten hat? Warum werden verwickelte Untersuchungen, wenn man sie einige Tage ruhen läßt und sich absichtlich ganz von ihnen entfernt, nach dieser Zeit oft so klar und deutlich, als sie durch eine fortgesetzte, angestrengte Untersuchung nie geworden seyn würden? Wir bewundern oft, und mit Recht, das ungewöhnlich starke Gedächtniß einzelner Menschen. Aber wenn man bedenkt, welche Anzahl von Dingen, auch das gewöhnlichste Gedächtniß eines jeden Menschen enthält, so müssen wir erstaunen, wie so viele Gegenstände in einem so kleinen Raume ohne Verwirrung Platz haben können. Einem Sänger auf unsern Bühnen z. B. muß jede Sylbe seiner Rolle, ihr Ton, ihr Zeitmaß und die Geberde, welche sie begleiten soll, klar und lebhaft in seinem Gedächtnisse vorschweben, und die morgige Rolle muß allen diesen unübersehbaren Vorrath in den dunklen Hintergrund zurückstellen, um einem neuen, ähnlichen Heere von Vorstellungen und Erinnerungen ihre Stelle abzutreten. Alle diese endlosen Reihen liegen zu gleicher Zeit in seinem Gedächtnisse, und können, wie die Register einer Orgel, gezogen werden, um je nach dem Bedürfnisse die eine oder die andere in den Vordergrund treten und alle andern übertönen zu lassen.

Diese und unzählige andere Operationen unsers innern Sinnes werden alle durch Wiederholung geläufiger und nachdrücklicher zugleich. Aus dieser reichen Quelle der Psychologie entspringen unsere Gewohnheiten, unsere Gebräuche und selbst unsere Sitten. Aus ihr allein läßt sich erklären, warum, was bey dem einen Volke allgemein als gut, schicklich und der Natur angemessen erscheint, von dem andern als schlecht betrachtet und oft mit Abscheu zurückgestoßen wird. Die Gladiatorenspiele der alten Römer und die Menschenopfer der Wilden erregen Entsetzen auch bey jenen Nationen, die, wegen bloßen Meinungen, Tausende ihrer Brüder mit Lust dem langsamen Tode auf ihren Scheiterhaufen übergeben und sich, jenen gegenüber, für sehr gesittete Menschen halten. Wenn man den bejammernswürdigen Zustand der Sklaven auf den westindischen Zuckerplantagen, oder den der für im-

merwährende Zeiten der Verachtung übergebenen Kaste der Parias, ja wenn man, um nur bey uns selbst stehen zu bleiben, die Zeiten der Leibeigenschaft, oder der Inquisition oder der Kreuzzüge zurückruft, so kann man sich nur mit Mühe enthalten, in die bittersten Thränen und Vorwürfe über ein Geschlecht auszubrechen, das sich vor allen andern Geschöpfen der Erde durch seine Vernunft zu unterscheiden glaubt, und das durch bloße Meinungen, Vorurtheile und Gewohnheiten bis zu solchen entsetzlichen Extremen verleitet werden kann.

Übrigens wird man, bey einiger Aufmerksamkeit auf sich selbst, diejenigen Äußerungen, welche der bloßen Gewohnheit angehören, leicht von denjenigen unterscheiden, welche gleichsam aus der innern und eigenthümlichen Organisation eines jeden Menschen hervorgehen. Wir haben vielleicht sehr unrecht, zu sagen, daß die Thiere allein von der Natur mit Instinct versehen worden sind, da das, was jenem innern Organismus des Menschen angehört, mit Recht denselben Namen erhalten soll. Die Anhänglichkeit der Mutter an ihren Säugling beruht so wenig auf bloßen Vernunftgründen, als die Anhänglichkeit an das andere Geschlecht, wie schon die große Macht beweist, welche diese Triebe, selbst gegen die laute Stimme der Vernunft, auf uns äußert. Ja bloße Ansichten und Meinungen, oft genug wiederholt, graben sich so tief in das Innere des Menschen ein, daß sie, wie mehrere äußere körperliche Dispositionen, von dem Vater auf die Kinder sich vererben und von einer Generation zur andern verpflanzen. Durch bloße Erziehung und Mittheilung wird man diese sonderbaren Phänomene nicht erklären, da sie ganz eigentlich der innern Structur des Menschen und so zu sagen dem Knochensysteme seines geistigen Wesens angehören. Ich habe eine Familie gekannt, in welcher seit mehreren Generationen alle Kinder, wenn sie die Zeit ihrer Pubertät erreichten, Schwärmer bis zum Wahnsinn wurden, während sie vor und nach dieser Periode für die nüchternsten Menschen galten. Drey Töchter einer Mutter, alle unbescholtene und wackere Frauen, die das Glück ihrer Männer machten, hatten von ihrer Mutter die Sonderbarkeit geerbt, während den Zeiten ihrer Hoffnung jede Scheere,

Nadel und andere weibliche Utensilien, die sie bey ihren Freundinnen fanden, sich anzueignen. Sie konnten dem Verlangen nicht widerstehen und alles, was sie über sich vermochten, bestand darin, daß sie diese Dinge in den folgenden Tagen unter der Ausrede der Vergeßlichkeit an ihre frühern Besitzerinnen wieder zurückschickten. Ihre Freundinnen kannten diese Unarten, die anfangs das Gerede der ganzen Stadt waren und die man später bloß zu belächeln sich begnügte, da das durchaus sehr geregelte Betragen dieser Frauen außer jenen Zeiten über allen Verdacht erhaben war.

Nicht weniger merkwürdig ist die Leichtigkeit, mit welcher unsere Organe, wenn sie oft geübt werden, ihre Functionen selbst ohne unsern Willen fortsetzen. Wer im Gehen von einer ihm interessanten Idee ergriffen wird, fängt an zu gesticuliren, ja laut zu sprechen, ohne daß er sich dessen bewußt wäre, und setzt mechanisch seinen Weg fort, ohne es zu wollen. Soldaten, die auf ermüdenden Märschen von dem Schlafe überfallen werden, gehen in demselben Tacte immer weiter und erwachen erst, wenn sie ein Hinderniß aufhält. Die Ärzte haben eine Krankheit bemerkt, in welcher der Mensch, einmal in Bewegung gesetzt, nicht innehalten kann, wenn er sich nicht an einen ihm begegnenden Gegenstand festhält. Überhaupt wird man von den Ärzten besonders wichtige Aufschlüsse über diesen Theil der Physiologie erwarten dürfen, wenn sie einmal ihre fortgesetzte Aufmerksamkeit auf diesen Gegenstand gerichtet haben werden, da die merkwürdigsten Phänomene dieser Art besonders deutlich in krankhaften Zuständen hervortreten.

Diese Erscheinungen der letzten Art zeigen sich allerdings nur bey solchen Operationen, an die wir durch eine öftere Wiederholung schon g e w ö h n t worden sind. Allein eben diese G e w o h n h e i t ist es, welche über uns, ohne daß wir uns dessen immer deutlich bewußt sind, eine so große Kraft ausübt, und die daher wohl eine nähere Untersuchung verdient. Bey einer unparteyischen Betrachtung unsrer Handlungen und beynahe aller unserer geistigen Functionen, werden wir finden, daß keineswegs, wie wir uns wohl sonst selbstgefällig zu schmeicheln pflegen, Übe

gung, Vernunftgründe und freye Wahl uns dazu bestimmen, sondern daß die Hauptquellen derselben aus einer Art von Instinct und aus Gewohnheit entspringen. Fast bey jeder unserer Überlegungen geht ein gewisses dunkles, aber sehr mächtig bestimmendes Gefühl vorher, das Menschen von glücklicher, innerer Organisation nur selten trügt; das uns sicherer führt, als alle künstliche Vernunftschlüsse, und das uns gewöhnlich allein zu führen pflegt, da das, was wir Vernunftschlüsse nennen, meistens nur spät nach jenem Gefühle eintritt und mehr dazu dient, jene erste Sensation zu controlliren. Die gütige Natur ließ es bey den Menschen nicht leicht auf die Vernunft allein ankommen, und der Trieb kömmt oft schon über uns, wenn wir mit dem schulgerechten Beweise und mit der eigentlichen Einsicht noch nicht zur Hälfte fertig sind. Das Brauchbarste in unserem Leben haben wir gewöhnlich von Niemand gelernt; es wohnt uns bey, und wir kamen dazu, ohne selbst recht zu wissen, auf welche Art. Am deutlichsten sehen wir dieses in jenen Dingen, in welchen wir eigentlich gar nichts, als eben auf diese Weise, sehen, ich meine, in unsern sogenannten hyperphysischen Wissenschaften. Denn besteht nicht z. B. unsere ganze Metaphysik eigentlich doch nur darin, uns dessen etwas deutlicher, oder wenn man lieber will, etwas gelehrter bewußt zu seyn, was wir alle auch ohne Metaphysik schon längst gewußt haben?

Ein nicht minder kräftiger Hebel, als dieses instinctartige Gefühl, ist aber auch, wie gesagt, die Gewohnheit. Es würde gewiß sehr schlecht um uns stehen, wenn wir alles nur aus Überzeugung thun sollten, und wenn wir zu nichts früh schon gewöhnt würden. Gar vieles und vielleicht das Beste in jedem Menschen ist nur durch eine beständige Gewohnheit von Kindheit an entstanden. Wenn unsere Erzieher, die der jungen so wie der alten Kinder, diese Wahrheit, die sie bisher wohl im Munde geführt, aber demungeachtet noch nicht völlig begriffen haben, ganz einsehen und sie ins praktische Leben einführen werden, so wird die moralische Welt eine ganz andere Gestalt annehmen. Pascal, der diese Macht der Gewohnheit wohl kannte, äußert sich darüber in seinen bekannten Pensées auf folgende

Art: „Wenn sich die Menschen nicht absichtlich verkennen wollen, so müssen sie nur gestehen, daß sie, selbst bey ihren geistigen Functionen, eben sowohl Seele als Körper sind, und daß sich diese beyden Elemente im Leben nicht so leicht trennen lassen, als man gewöhnlich glaubt. Das Ding, was in uns die eigentliche Überzeugung von einer Sache hervorbringt, ist durchaus nicht immer das, was wir den Beweis derselben nennen. Wie wenig Sachen gibt es, die für uns wirklich bewiesen sind?" — Diese Beweise überzeugen nur den Verstand, aber Instinct und Gewohnheit reißt uns ganz mit sich fort. Die Gewohnheit leitet endlich sogar den Verstand und zieht den Geist nach sich, ohne daß dieser es bemerkt. Wer hat uns bewiesen, daß morgen die Sonne wieder aufgehen wird, oder daß wir alle einmal sterben werden. Und doch, was wird so allgemein, so ohne alle Ausnahme von Jedermann geglaubt, als eben dieses? Erfahrung und Gewohnheit sind es also, die uns überzeugen, und die gar keine Zweifel aufkommen lassen, so wie sie es sind, die den Türken und den Heiden, die den Handwerker und den Soldaten machen. Zu ihnen muß man im praktischen Leben immer wieder zurückkommen, um unsere Geschäfte und Verrichtungen abzukürzen und uns nicht dem Mangel an den eigentlichen Beweisen auszusetzen, die uns so leicht verlassen, wo wir ihrer am dringendsten bedürfen. Wer diese Beweise immer gegenwärtig haben will, macht sich zu viel zu thun und kömmt nie zu Ende. Die Gewohnheit geht sicherer zugleich und schneller: ohne Gewalt, ohne Kunst, ohne Demonstration leitet sie uns zum Ziele, so daß wir durch sie auf eine uns natürliche und gleichsam mechanische Weise alle unsere Geschäfte viel besser verrichten, als wir dieß je durch die bloße Theorie hätten thun können. Es reicht nicht hin, eine Sache bloß aus Gründen und aus Überzeugung anzunehmen; auch unsere Sinne, auch der körperliche Theil unsers Wesens muß zu dieser Annahme bewogen werden: beyde Theile müssen zugleich in Bewegung gesetzt werden, der Verstand durch Gründe, die aber einmal gekannt zu haben für das ganze Leben hinreicht, und die Sinne durch die Gewohnheit, die dann ihre wohlthätigen Wirkungen bis an unsern Tod verbreitet.

Es ist sehr wünschenswerth, daß unsere Philosophen, statt den unfruchtbaren Speculationen, mit welchen sie sich gewöhnlich beschäftigen, diese für den Menschen eben so wichtigen als interessanten Gegenstände weiter verfolgen und genauer untersuchen wollten. Noch haben wir zu wenig Erfahrungen dieser Art gesammelt, um darauf die Theorie jener höhern Physiologie mit Sicherheit gründen zu können. Aber das Feld ist groß, und reich die Ernte für Schnitter, die Muth und Kraft in sich fühlen, das Werk zu beginnen und uns allen ein großes Thor zu neuen Kenntnissen, eine neue Welt zu öffnen, besonders wenn durch ihre Bemühungen ihre Nachfolger, unsere späten Enkel, in den Stand gesetzt werden, auf den gesammelten Vorrath von Erfahrungen und Beobachtungen die Kraft ihrer Analyse anzuwenden, und dadurch erst der neuen Erkenntniß diejenige Sicherheit zu geben, welche wir in allen denjenigen Wissenschaften und nur in denen besitzen, die einer mathematischen Unterlage fähig sind. Die allerdings nicht geringen Schwierigkeiten, dieses jetzt von uns noch so ferne Ziel zu erreichen, werden uns in unsern Bemühungen eben so wenig zurückhalten, als es die vielleicht nicht geringern Hindernisse zu thun vermochten, welche sich der Entdeckung des Gesetzes der allgemeinen Schwere entgegengesetzt haben. Seit dieser großen und für alle Zeiten merkwürdigen Entdeckung hat man gefunden, daß dieses Gesetz nicht nur die Bewegung der himmlischen Körper in dem endlosen Weltenraume genau darstellt, sondern daß es auch, unter zweckgemäßen Modificationen, die Anordnung der kleinsten, die Körper constituirenden Elemente und die regelmäßige Bildung der Krystalle, aus denen sie bestehen, in sich schließt: warum sollte nicht auch jene Bewegung der thierischen Nerven denselben Gesetzen der Dynamik unterliegen, und so gleichsam die dreyfache uns umgebende Welt einen einzigen, gemeinschaftlichen Ursprung haben? Bereits scheinen mehrere Erfahrungen diese Bemerkung zu bestätigen. Die Bewegungen, welche jene Nervenvibrationen dem Muskelsysteme, und durch dasselbe den äußern, fremden Körpern mittheilen, sind alle, wie Entwicklungen elastischer Federn, der Art, daß dabey der gemeinschaftliche Schwerpunct unsers eigenen

und der bewegten fremden Körper, dem bekannten Grundsatz der Mechanik zu Folge, unbeweglich bleibt. Auch jene Vibrationen scheinen sich, ohne Störung oder Verwirrung, eine über die andere zu verbreiten, wie wir dieses bey den Wellen unserer Gewässer und selbst unserer Atmosphäre bemerken. Diese Vibrationen theilen sich den Umstehenden mit, wie sich die Schwingungen eines tönenden Körpers den sie umgebenden Gegenständen mittheilen. Wie es aber auch mit diesen jetzt noch im tiefen Dunkel liegenden Gegenständen und mit ihrer Beleuchtung in einer wahrscheinlich noch sehr fernen Zukunft sich verhalten mag, uns genüge es, diese Zukunft wenigstens geahndet, und uns der Wahrheit, die uns vielleicht immer versagt ist, so viel es unsere schwachen Kräfte vermochten, genähert zu haben.

Anmerkungen.

I. Absolute Wahrscheinlichkeit.

Wenn es unter einer Anzahl von N gleich möglichen Fällen Fälle, die irgend einem Ereignisse günstig, also auch $n' = N - n$ di sem Ereignisse nicht günstige Fälle gibt, so ist, nach dem oben ang führten Grundsatze, die Wahrscheinlichkeit w, daß ein günstiger Fa eintrete,

$$w = \frac{n}{N}$$

und eben so die Wahrscheinlichkeit w', daß ein ungünstiger eintrete,

$$w' = \frac{n'}{N'}$$

und die Summe beyder Wahrscheinlichkeiten $w + w' = 1$ ist gleich d Einheit d. h. der Gewißheit, daß entweder ein günstiger oder ein u günstiger Fall eintreten wird.

Ex. I. Von drey Urnen A, B, C enthält eine nur schwarze und d beyden andern nur weiße Kugeln. Welches ist die Wahrschei lichkeit w, daß man, wenn man auf Gerathewohl aus einer di ser drey Urnen eine Kugel nimmt, eine schwarze Kugel zieh wird?

Wenn man nicht weiß, welche dieser drey Urnen die schwarz Kugeln enthält, so gibt es hier drey gleich mögliche Fälle, von den aber nur einer ein günstiger ist; also ist $w = \frac{1}{3}$. Wenn man aber z. B weiß, daß die Urne A nur weiße Kugeln enthält, so wird man d Hand gewiß nur an eine von den beyden andern legen; der möglich Fälle werden also nur mehr zwey seyn, von denen einer ein günstig

lso wird auch die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu zie-
w $= \frac{1}{2}$ seyn. In jenem Falle wird man also 1 gegen 3, in die-
ber 1 gegen 2 wetten können, daß eine schwarze Kugel gezogen
Weiß man endlich, daß beyde Urnen A und B nur weiße Kugeln
ten, so wird man die Hand nur an die dritte Urne C legen,
a hier gewiß eine schwarze Kugel gezogen wird, so wird auch
Jahrscheinlichkeit dieses Ereignisses gleich der Einheit seyn. In
hat ist in dem letzten Falle nur ein günstiger und auch nur ein
her Fall, also die Wahrscheinlichkeit gleich der Einheit oder gleich
ewißheit.

II. Man habe zwey sechsseitige Würfel A und B, wo jede der Seiten nach der Reihe mit 1, 2.. bis 6 bezeichnet ist.

Die Wahrscheinlichkeit, daß man auf einen Wurf mit dem einen
el A die Zahl 2 und mit dem andern B die Zahl 5 wirft, ist gleich
id eben so jede für zwey andere Zahlen, weil überhaupt, wie die
ide Tafel zeigt, 36 gleich mögliche Fälle und unter diesen nur
instiger ist.

A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2
1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3
1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4
1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5
1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, daß man überhaupt, ohne
cht auf die einzelnen Würfel, mit einem Würfe beyder Würfel
ihl 2 und 5 werfe, gleich $\frac{2}{36}$, aber die Wahrscheinlichkeit, daß
wey gleiche Zahlen 1, 1 oder 2, 2 . . werfe, ist nur $\frac{1}{36}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe der auf einen Wurf
fenen Zahlen gleich 7 sey, ist $\frac{6}{36}$; die Wahrscheinlichkeit, daß
ich 5 sey, ist gleich $\frac{4}{36}$, daß sie gleich 4 sey, gleich $\frac{3}{36}$

II. Relative Wahrscheinlichkeit.

Ist $N = n + n'$ die Anzahl aller möglichen Fälle, und unter ihnen n die Anzahl einer Art und n' die einer andern Art, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fall der ersten Art eintrete, wenn nur diese beyden Arten berücksichtiget werden, gleich

$$\frac{n}{n + n'}$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fall der zweyten Art eintrete, ist gleich

$$\frac{n'}{n + n'}$$

Nennt man wieder $w = \frac{n}{N}$ und $w' = \frac{n'}{N}$ die absoluten Wahrscheinlichkeiten, so ist

$$\frac{n}{n + n'} = \frac{w}{w + w'} \text{ und } \frac{n'}{n + n'} = \frac{w'}{w + w'}$$

oder die relative Wahrscheinlichkeit eines Falles ist gleich der absoluten Wahrscheinlichkeit desselben Falles, dividirt durch die Anzahl der absoluten Wahrscheinlichkeiten.

Ex. I. Zwey Personen spielen mit zwey Würfeln unter der Bedingung, daß, indem alle übrigen Fälle unbeachtet bleiben, der Erste gewinnen soll, wenn er mit einem Wurfe 7, und der Andere, wenn er 4 wirft, so ist (nach I.) die absolute Wahrscheinlichkeit, daß der Erste gewinne, $w = \frac{6}{36}$ und die des Zweyten $w' = \frac{3}{36}$; also ist die relative Wahrscheinlichkeit, daß der Erste gewinne, $\frac{w}{w + w'} = \frac{6}{9}$ und die, daß der Zweyte gewinne, $\frac{w'}{w + w'} = \frac{3}{9}$ oder ihre Wahrscheinlichkeit zu gewinnen verhalte sich wie 6 : 3 oder wie 2 : 1.

Ex. II. Eine Urne enthält m weiße, n rothe, p blaue, q grüne Kugeln u. s. f., und es sey $m + n + p + q \ldots = T$.

Die absolute Wahrscheinlichkeit, daß man auf den ersten Zug eine weiße ziehen wird, ist $\frac{m}{T}$ und eben so für eine rothe $\frac{n}{T}$ u. s. w.

Aber die relative Wahrscheinlichkeit, daß man eher eine weiße, als eine rothe ziehen wird, ist gleich

$$\frac{\frac{m}{T}}{\frac{m}{T}+\frac{n}{T}}=\frac{m}{m+n},$$

also auch die Wahrscheinlichkeit, daß man eher eine rothe als eine weiße ziehen wird, gleich

$$\frac{\frac{n}{T}}{\frac{m}{T}+\frac{n}{T}}=\frac{n}{m+n}$$

und die Summe beyder Wahrscheinlichkeiten ist wieder gleich der Einheit.

III. Wahrscheinlichkeit für mehrere Arten von günstigen Fällen.

Von N möglichen Fällen seyen n für einen, n′ für einen zweyten, n″ für einen dritten Fall u. s. f. günstig, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß irgend einer dieser günstigen Fälle eintrete, gleich

$$\frac{n+n'+n''+}{N}$$

oder gleich $w+w'+w''+$

wenn wieder $w=\frac{n}{N}$, $w'=\frac{n'}{N'}$, $w''=\frac{n'''}{N}$ ... die absoluten Wahrscheinlichkeiten dieser Fälle sind.

Ex. Die absolute Wahrscheinlichkeit, mit zwey Würfeln 7 zu werfen, war gleich $\frac{6}{36}$, und die absolute Wahrscheinlichkeit, 8 zu werfen, ist $\frac{5}{36}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Wurfe entweder 7 oder 8 zu werfen, gleich

$$\frac{6}{36}+\frac{5}{36}=\frac{11}{36}=0.305.$$

Die absolute Wahrscheinlichkeit, 9 zu werfen, ist $\frac{4}{36}$, also ist die Wahrscheinlichkeit, auf einen Wurf entweder 7 oder 8 oder 9 zu werfen, gleich

$$\frac{6+5+4}{36}=\frac{15}{36}=0.417.$$

IV. Wahrscheinlichkeit des wiederholten Eintreffens eines günstigen Falles.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereigniß, dessen absolute Wahrscheinlichkeit gleich $w = \frac{n}{N}$ ist, m mal nach einander eintrete, ist gleich

$$\left(\frac{n}{N}\right)^m \text{ oder gleich } w^m.$$

Ex. Mit einem Würfel die Zahl 1 zu werfen, ist die absolute Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{6}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel zweymal nach einander die Zahl 1 zu werfen, gleich $\frac{1}{6^2}$ und dreymal, gleich $\frac{1}{6^3}$ u. s. f.

Die absolute Wahrscheinlichkeit, mit zwey Würfeln auf einen Wurf die Zahlen 1 und 1 zu werfen, ist $\frac{1}{36}$, also ist die Wahrscheinlichkeit, mit ihnen zweymal nach einander die Zahlen 1 und 1 zu werfen, gleich $\frac{1}{36^2} = 0.0008$.

Die absolute Wahrscheinlichkeit, mit zwey Würfeln auf einen Wurf zwey gleiche Zahlen überhaupt zu werfen, ist $\frac{6}{36}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Fall viermal hinter einander eintreffe, gleich

$$\left(\frac{6}{36}\right)^4 = \frac{1}{1296} = 0.0008.$$

V. Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens mehrerer Ereignisse.

Von N Fällen einer Art seyen n günstige; von N′ Fällen einer andern Art n′ günstige u. s. w.; also die absolute Wahrscheinlichkeit dieser Fälle

$$w = \frac{n}{N} \quad w' = \frac{n'}{N'} \quad w'' = \frac{n''}{N''} \text{ u. s. w.}$$

Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß von diesen günstigen Fällen mehrere zugleich eintreffen,

für zwey Fälle $\frac{n}{N} \cdot \frac{n'}{N'} = w \cdot w'$,

für drey Fälle $\frac{n}{N} \cdot \frac{n'}{N'} \cdot \frac{n''}{N''} = w \cdot w' \cdot w''$ u. s. f.

Ex. I. Die absolute Wahrscheinlichkeit, daß mit zwey Würfeln 8 geworfen werde, war $\frac{5}{36}$ und die, daß 9 geworfen werde, ist $\frac{4}{36}$, also ist die Wahrscheinlichkeit, daß mit zwey Würfeln in zwey Würfen 8 und 9 geworfen werden, gleich

$$\frac{5}{36} \cdot \frac{4}{36} = \frac{5}{324} = 0.0154.$$

Ex. II. Wenn A und B jeder zwey und C nur einen Würfel wirft, so ist die absolute Wahrscheinlichkeit, daß A zwey gleiche Zahlen werfe, gleich $\frac{6}{36}$; die Wahrscheinlichkeit, daß B keine gleichen Zahlen werfe, gleich $\frac{30}{36}$ und die Wahrscheinlichkeit, daß C die Zahl 6 werfe, gleich $\frac{1}{6}$. Also ist auch die Wahrscheinlichkeit, daß alle drey Fälle zugleich eintreffen, gleich

$$\frac{6}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216} = 0.0231.$$

Ex. III. Wenn ein Spiel von 32 Karten in vier Theile, nach den vier Farben getheilt wird, so daß jeder Theil nur eine Farbe enthält: welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß man auf den ersten Zug eine Figur von gegebener Farbe ziehe?

Die absolute Wahrscheinlichkeit, daß man die Hand auf das rechte von den vier Packeten lege, ist $\frac{1}{4}$. Da aber dieses Packet 8 Karten enthält, von welchen nur 3 günstig sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß man aus diesem Packete die wahre Karte ziehe, gleich $\frac{3}{8}$, also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8}$, oder gleich $\frac{3}{32} = 0.094$. Da nämlich nur eines der 4 Packete die wahre Karte enthält und da von den 8 Karten jedes Packets nur 3 günstige sind, so muß man die $\frac{3}{8}$ nur von dem vierten Theile aller Karten nehmen.

Ex. IV. Eine Urne enthält 2 weiße und 1 schwarze Kugel. Eine

andere enthalte 4 weiße und 1 schwarze. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß man auf den ersten Zug aus einer dieser Urnen eine weiße Kugel ziehen wird?

Die absolute Wahrscheinlichkeit, daß man die Hand an die erste Urne legen wird, ist $\frac{1}{2}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß dann eine weiße Kugel gezogen wird, ist $\frac{2}{3}$, also ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens beyder Fälle gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Ganz eben so hat man bey der zweyten Urne für die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens beyder Fälle $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$. Da aber diese zwey Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{5}$, beyde für dasselbe günstige Ereigniß gehören, so hat man (nach III) für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15} = 0.733.$$

Ex. V. Das vorhergehende Beyspiel allgemeiner zu machen, habe man

a Urnen, deren jede m weiße und n schwarze Kugeln hat, und a′ Urnen, deren jede m′ weiße und n′ schwarze Kugeln hat, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß man auf den ersten Zug eine weiße Kugel ziehen wird, gleich

$$\frac{a}{a + a'} \cdot \frac{m}{m + n} + \frac{a'}{a + a'} \cdot \frac{m'}{m' + n}.$$

Ex. VI. Hat man m Fälle, die dem Ereignisse A günstig sind und n Fälle, die dem Ereignisse B günstig sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwey Versuche nach einander

A und A geben, gleich . . . $\frac{m^2}{(m + n)^2}$

A und B » » . . . $\frac{m\ n}{(m + n)^2}$

B und A » » . . . $\frac{n\ m}{(m + n)^2}$

B und B » » . . . $\frac{n^2}{(m + n)^2}$

Sieht man also nicht auf die Ordnung, in welcher diese Ereignisse einander folgen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß man z. B. mit einem Würfel in zwey Würfen

A und A geben, gleich . . . $\frac{m^2}{(m+n)^2}$

A . B oder B . A . . . . $\frac{2mn}{(m+n)^2}$

B und B . . . . $\frac{n^2}{(m+n)^2}$

Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, daß, ohne auf die Ordnung er Seiten A, B zu sehen, drey Würfe

3mal A geben gleich . . . . $\frac{m^3}{(m+n)^3}$

2mal A und 1mal B . . . $\frac{3m^2n}{(m+n)^3}$

1mal A und 2mal B . . . $\frac{3mn^2}{(m+n)^3}$

3mal B . . . . $\frac{n^3}{(m+n)^3}$.

Man bemerkt hier sogleich die Ähnlichkeit dieser Ausdrücke mit jenen des Binomiums. Es sey daher, um dieß fortzusetzen, der Kürze wegen $f = \frac{m+n}{m}$ und $g = \frac{m+n}{n}$, und die Reihe gegeben

$$f^p + p \cdot f^{p-1} g + \frac{p \cdot p-1}{1.2} \cdot f^{p-2} g^2 + \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f^{p-3} g^3 + \ldots$$

so ist das erste Glied dieser Reihe die Wahrscheinlichkeit, daß man mit p Würfen pmal die Zahl A treffe; das zweyte Glied drückt die Wahrscheinlichkeit aus, mit p Würfen (p — 1)mal A und 1mal B zu treffen; das dritte Glied aber gibt die Wahrscheinlichkeit, mit p Würfen (p — 2)mal A und 2mal B zu treffen u. s. w.

Ex. VII. Welches ist aber die Wahrscheinlichkeit, daß man in p Würfen wenigstens nicht weniger als (p — 1)mal A treffe?

Da in dem gesuchten Ereignisse auch das enthalten ist, wo man in p Würfen pmal A trifft, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich der Summe der zwey ersten Glieder jener Reihe, also gleich

$$f^p + p \cdot f^{p-1} g$$

und eben so ist die Wahrscheinlichkeit, daß man in p Würfen nicht weniger als (p — 2)mal A und nicht weniger als 2mal B treffe, gleich der Summe der drey ersten Glieder jener Reihe u. s. f.

Ex. VIII. Um darauf einige besondere Fälle anzuwenden, suchen wir die Wahrscheinlichkeit, mit einem 6seitigen Würfel in 4 Würfen die Zahl 6 wenigstens 2mal zu werfen.

Hier ist $m = 1$, $n = 5$ und $p = 4$, also die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich der Summe der drey ersten Glieder jener Reihe, oder gleich

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} + \frac{4 \cdot 3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{171}{1296} \text{ oder}$$

nahe gleich $\frac{1}{7}$.

Suchen wir noch die Wahrscheinlichkeit, mit 4 Würfen die Zahl 6 wenigstens einmal zu werfen, so ist m, n und p, wie zuvor, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die Summe der vier ersten Glieder jener Reihe, oder gleich

$$\frac{171}{1296} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{671}{1296}$$

und da diese Zahl $\frac{671}{1296}$ etwas größer als $\frac{1}{2}$ ist, so ist es auch wahrscheinlicher, daß die Zahl 6 in 4 Würfen einmal, als daß sie gar nicht vorkommen wird.

VI. Wahrscheinlichkeiten für wechselseitige Ereignisse.

Für N mögliche Fälle sey $w = \frac{n}{N}$ die absolute Wahrscheinlichkeit eines, und $w' = \frac{n'}{N}$ die eines andern Ereignisses, so ist also w die Wahrscheinlichkeit, daß das I^te Ereigniß eintreffe, und $1 - w$ die Wahrscheinlichkeit, daß das I^te Ereigniß nicht eintreffe.

Eben so ist (nach V)

$w w'$ die Wahrscheinlichkeit, daß beyde Ereignisse I und II zugleich eintreffen, und $(1 - w) w'$ die Wahrscheinlichkeit, daß I nicht, aber wohl II eintreffe; $(1 - w') w$ die Wahrscheinlichkeit, daß I, aber nicht II eintreffe, und $1 - (1 - w)(1 - w') = w + w - w w'$ die Wahrscheinlichkeit, daß I oder daß, wenn I nicht, wenigstens II, daß also von beyden wenigstens eines eintreffe.

Ex. Die Wahrscheinlichkeit, mit zwey Würfeln auf den ersten Wurf 9, oder wenn dieß nicht geschieht, wenigstens auf den zweyten Wurf 9 zu treffen, ist gleich

$$1 - \left(1 - \frac{4}{36}\right)\left(1 - \frac{4}{36}\right) = 0.2099.$$

Die Wahrscheinlichkeit aber, auf den ersten Wurf 9, oder wenn dieß nicht geschieht, auf den zweyten Wurf 8 zu treffen, ist gleich

$$1 - \left(1 - \frac{4}{36}\right)\left(1 - \frac{5}{36}\right) = 0.2345.$$

Eben so hat man, wenn noch ein drittes Ereigniß, dessen absolute Wahrscheinlichkeit $w'' = \frac{n''}{N}$ ist, hinzukömmt, für die Wahrscheinlichkeit, daß I, oder wenn dieß nicht geschieht, daß II, oder wenn auch dieses nicht geschieht, daß dann wenigstens III eintreffe, den Ausdruck $1 - (1 - w)(1 - w')(1 - w'')$ u. s. f.

Ex. Die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln im ersten Wurfe die Zahl 7, oder, wenn dieß nicht geschieht, im zweyten die Zahl 7, oder wenn auch dieses nicht geschieht, wenigstens in dem dritten Wurfe die Zahl 7 zu werfen, ist gleich

$$1 - \left(1 - \frac{6}{36}\right)\left(1 - \frac{6}{36}\right)\left(1 - \frac{6}{36}\right) = 1 - \left(\frac{30}{36}\right)^3 = 0.421.$$

Sucht man dieselbe Wahrscheinlichkeit für die Zahl 2, so ist sie gleich $1 - \left(1 - \frac{1}{36}\right)^3 = 0.081$, also viel kleiner.

Diese Ausdrücke lassen sich unmittelbar auf die wahrscheinliche Dauer der Verbindungen zweyer oder mehrerer Personen in Witwen- und Waisenanstalten anwenden. Ist nämlich w die Wahrscheinlichkeit, daß eine a jährige Person A noch p Jahre leben wird und ist eben so w' die Wahrscheinlichkeit, daß eine b jährige Person B noch p Jahre, und w'', daß eine c jährige Person C noch p Jahre leben wird u. s. w., welche Wahrscheinlichkeiten man aus den bekannten Mortalitätstafeln findet, so ist ww' die Wahrscheinlichkeit, daß A und B noch p Jahre beysammen leben oder die Ehedauer. Eben so ist $1 - ww'$ die Wahrscheinlichkeit, daß von diesen beyden Personen nach p Jahren eine schon todt ist; $w(1 - w')$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren A noch lebe und B schon todt ist; $w'(1 - w)$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren A schon todt ist und B noch lebe; $(1 - w)(1 - w')$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren beyde schon todt sind und $1 - (1 - w)(1 - w')$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren noch nicht beyde todt sind, sondern daß wenigstens einer, oder vielleicht beyde noch leben.

Eben so ist $ww'w''$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren alle drey Personen A, B, C noch beysammen leben; $ww'(1 - w'')$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren A und B noch leben, aber C

schon todt ist; $(1-w)(1-w')w''$ die Wahrscheinlichkeit, daß na Jahren A und B schon todt sind, aber C noch lebe; $1-ww'w''$ Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren wenigstens eine von diesen Personen todt ist; $1-(1-w)(1-w')(1-w'')$ die Wahrschein keit, daß nach p Jahren noch nicht alle drey todt sind, sondern wenigstens eine, vielleicht zwey, vielleicht alle drey noch le $(1-w)(1-w')(1-w'')$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Ja alle drey schon todt sind u. s. w.

VII. Lotterien.

A. Eine Lotterie enthalte n Nummern, von welchen bey jeder hung r Nummern gezogen werden. Man hat a Nummer setzt. Welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß diese a mern alle herauskommen?

$$\text{Es ist } w = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-a+1)}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-a+1)}$$

In unsern gewöhnlichen Lotterien ist $n = 90$ und $r = 5$ al

$$w = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \ldots (6-a)}{90 \cdot 89 \cdot 88 \ldots (91-a)}$$

1. Hat man also nur eine Nummer gesetzt, so ist $a = 1$ u Wahrscheinlichkeit, daß sie heraus komme

$$w = \frac{1}{18} = 0.0555.$$

2. Für zwey Nummern ist $a = 2$ und daher die Wahrschei keit, mit zwey gesetzten Nummern eine Ambe zu erhalten

$$w = \frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89} = \frac{2}{801} = 0.002497.$$

Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, mit drey Nummern eine zu erhalten

$$w = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{90 \cdot 89 \cdot 88} = \frac{1}{11748} = 0.000\ \ 085$$

und mit vier Nummern eine Quaterne

$$w = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87} = \frac{1}{511038} = 0.000\ \ 001\ \ 957$$

und endlich mit fünf gesetzten Nummern eine Quinterne

$$w = \frac{5 . 4 . 3 . 2 . 1}{90 . 89 . 88 . 87 . 86} = \frac{1}{43949268} = 0.000\ 000\ 023$$

B. Die Wahrscheinlichkeit, daß a gesetzte Nummern alle und überdieß noch in einer bestimmten Ordnung herauskommen, ist

$$w = \frac{r (r - 1) (r - 2) \ldots (r - a + 1)}{1 . 2 . 3 \ldots a . n (n - 1) (n - 2) \ldots (n - a + 1)}$$

C. Setzt man endlich $a = r$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die sämmtlichen r Nummern, welche in einer Ziehung gezogen werden, voraus bestimmte Nummern sind (nach A)

$$w = \frac{1 . 2 . 3 \ldots r}{n (n - 1) (n - 2) \ldots (n - r + 1)}$$

und daß sie überdieß noch nach einer bestimmten Ordnung herauskommen (nach B)

$$w = \frac{1}{n (n - 1) (n - 2) \ldots (n - r + 1)}.$$

D. Eine Lotterie bestehe wieder aus n Nummern, von welchen bey jeder Ziehung r gezogen werden. Welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß von a gesetzten Nummern eine bestimmte Anzahl, z. B. b Nummern herauskomme?

Sey $A = \frac{(n - a) (n - a - 1) (n - a - 2) \ldots (n - a - [r - b - 1])}{n (n - 1) (n - 2) \ldots (n - r + 1)}$

$$B = a (a - 1) (a - 2) \ldots (a - b + 1)$$
$$C = r (r - 1) (r - 2) \ldots (r - b + 1)$$

so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{A . B . C}{1 . 2 . 3 \ldots b}.$$

Ex. 1. Man hat zwey Nummern gesetzt. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß von ihnen gewiß eine herauskömmt? Ist wie zuvor $n = 90$ und $r = 5$, so ist für dieses Beyspiel $a = 2$ und

$b = 1$, also $A = \frac{85}{90 . 89}$, $B = 2$ und $C = 5$, also

$$w = \frac{85}{801} = 0 . 10611$$

Ex. 2. Hat man drey Nummern gesetzt, so ist $a = 3$ und die

Welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß in der That eine weiße Kugel gezogen worden ist?

Haben wieder p und r die vorige Bedeutung und setzt man

$$q = pr + (1-p)(1-r)$$

so findet man

$$w = \frac{q}{q + (1-q)(n-1)}$$

und eben so ist die Wahrscheinlichkeit w′, daß nicht eine weiße, sondern eine schwarze Kugel gezogen wurde

$$w' = 1 - w = \frac{(1-q)(n-1)}{q + (1-q)(n-1)}$$

Ist die Zahl n der Kugeln sehr groß, so wird die Aussage der Zeugen sehr zweifelhaft, wie der Ausdruck für w zeigt, wenn nicht zugleich q sehr nahe an 1 ist. Je größer aber die Zahl der Kugeln ist, desto außerordentlicher erscheint auch das von den Zeugen ausgesagte Ereigniß, zum Beweise, wie sehr die Außerordentlichkeit einer Begebenheit die Aussage der Zeugen schwächt.

Die Größe q zeigt die Wahrscheinlichkeit an, daß der Zeuge wirklich die Wahrheit gesagt habe, so wie sie ihm erschien. Daß er also weder betrogen noch sich geirrt, oder daß er zugleich betrogen und sich geirrt habe.

Ex. III. Eine Urne enthalte eine Anzahl n weißer und eine andere Urne eine eben so große Anzahl schwarzer Kugeln. Man zieht aus einer dieser Urnen eine Kugel und wirft sie in die andere Urne, und zieht endlich aus dieser andern Urne wieder eine Kugel.

Ein Zeuge sagt aus, daß in der ersten Ziehung eine weiße Kugel gezogen worden sey, und ein zweyter Zeuge sagt aus, daß auch in der zweyten Ziehung eine weiße Kugel gezogen worden sey. Welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß wirklich in beyden Ziehungen eine weiße Kugel gezogen worden sey?

Bezeichnet wieder q die Wahrscheinlichkeit, daß der erste Zeuge und q′ die, daß der zweyte die Wahrheit gesagt habe, wo also wieder $q = pr + (1-p)(1-r)$ und $q' = p'r' + (1-p')(1-r')$ ist, so sey der Kürze wegen

$$Q = qq' + (1-q)(1-q')$$

und es ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{qq'}{Q + (1-Q)n}$$

also wieder diese Wahrscheinlichkeit desto kleiner, je größer die Anzahl

der Kugeln, d. h. je außerordentlicher das von den Zeugen ausgesagte Ereigniß ist.

Ex. IV. Zwey Zeugen sagen über irgend ein Ereigniß übereinstimmend dasselbe aus. Welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß dieses Ereigniß in der That statt hatte?

Eine Urne enthalte z. B. n Nummern, und beyde Zeugen sagen aus, daß die Nummer a gezogen worden sey.

Sind p und p′ die Grade der Wahrhaftigkeit der beyden Zeugen und nimmt man $r = r' = 1$, d. h. nimmt man an, daß sie sich nicht geirrt haben, so findet man die Wahrscheinlichkeit, daß die Nummer a in der That gezogen worden ist

$$w = \frac{1}{1 + \frac{(1-p)(1-p')}{(n-1)\,p\,p'}} \quad . \; . \; . \; (A)$$

also auch die Wahrscheinlichkeit, daß sie nicht gezogen worden ist

$$w' = 1 - w = \frac{1}{1 + \frac{(n-1)\,p\,p'}{(1-p)(1-p')}}$$

Ist $n = 2$, so sind beyde Wahrscheinlichkeiten einander gleich und man hat

$$w = w' = \frac{p\,p'}{p\,p' + (1-p)(1-p')}$$

und dieß ist überhaupt der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit eines von zwey Zeugen übereinstimmend ausgesagten Ereignisses, wenn das Eintreffen und Nichteintreffen dieses Ereignisses gleich möglich ist.

Ist die Wahrhaftigkeit beyder Zeugen gleich groß, so ist die letzte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\frac{p^2}{p^2 + (1-p)^2}$$

und überhaupt: sagen r gleich wahrhafte Zeugen die Existenz eines solchen Ereignisses aus, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dasselbe in der That statt gehabt habe, gleich

$$\frac{p^r}{p^r + (1-p)^r}$$

vorausgesetzt, daß die Existenz und Nichtexistenz des Ereignisses gleich möglich ist.

Ist die Anzahl n der Nummern der Urne sehr groß, so wird in der Gleichung (A) die Größe w nahe gleich 1 oder es ist ungemein wahrscheinlich, daß die Nummer a in der That gezogen worden ist.

Die Ursache davon ist, weil die Zeugen, wenn sie ja betriegen w ten, nicht alle dieselbe Nummer angegeben haben würden.

Ex. V. Eine Urne enthalte n Nummern. Ein erster Zeuge aus, daß die Nummer a, ein zweyter aber, daß die Num b gezogen worden sey. Die Wahrhaftigkeit dieser beyden gen sey p und p′ und ihre Sicherheit wieder $r = r' = 1$.

Dieß vorausgesetzt, ist die Wahrscheinlichkeit w, daß die Za in der That gezogen worden ist,

$$w = \frac{p(1-p')}{1 - pp' - \frac{(1-p)(1-p')}{n-1}}.$$

Ist $n = 2$, d. h., ist die Existenz der beyden Ereignisse, w die Zeugen aussagen, eben so wahrscheinlich, als die Nichtexistenz selben, und ist überdieß $p = p'$, so wird die letzte Gleichung w = und daher auch die Wahrscheinlichkeit w′ des Gegentheils, daß n lich die Zahl b gezogen worden ist, $w' = 1 - w = \frac{1}{2}$, also w = weil beyde Zeugnisse sich gegenseitig aufheben.

Wird überhaupt ein Ereigniß dieser Art von f Zeugen bejaht von g Zeugen verneint, und ist die Wahrhaftigkeit aller Zeugen g groß, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Ereigniß sich in That zugetragen habe, gleich

$$\frac{p^{f-g}}{p^{f-g} + (1-p)^{f-g}}$$

d. h. diese Wahrscheinlichkeit ist, nach Ex. IV. eben so groß, als n sie von f — g Zeugen bestätiget worden.

Ex. VI. Nehmen wir nun an, die Aussage, daß z. B. aus e Urne mit n Nummern die Nummer a gezogen worden, nach und nach, auf dem Wege der Tradition, durch r Zeu bestätiget worden, so ist die Wahrscheinlichkeit w, daß di Ereigniß in der That statt gehabt hat,

$$w = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \frac{(np_1 - 1)(np_2 - 1)(np_3 - 1)\ldots(np_r - 1)}{(n-1)^r} \ldots$$

wo p_1 p_2 p_3 . . die Wahrhaftigkeit des 1, 2, 3 . . Zeugen zeichnet.

Ist n unendlich groß, so ist

$$w = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots p_r$$

Ist $n = 2$, d. h., ist die Existenz des Ereignisses eben so mög-lich, als die Nichtexistenz desselben, so ist

$$w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p_1 - 1)(2p_2 - 1)(2p_3 - 1)..(2p_r - 1)$$

Überhaupt, je weiter diese Reihe der Traditionen sich erstreckt, desto mehr nähert sich der Werth von w der Gränze $\frac{1}{n}$, d. h. der absoluten Wahrscheinlichkeit (Nr. I.), daß die Nummer a in der That gezogen worden ist. Das Glied $\frac{n-1}{n}$; $\frac{(np_1 - 1)}{(n-1)}$ ... ist also das, um was diese Reihe von Zeugen die absolute Wahrscheinlichkeit des Ereignisses vergrößert. Man sieht wie die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch spätere Zeugen immer vermindert wird, da die Werthe der Brüche $\frac{np_1 - 1}{n-1}$; $\frac{np_2 - 1}{n-1}$ .. immer kleiner werden, indem die Werthe der Größen $p_1\ p_2\ p_3$ .. mit der Zeit immer abnehmen. Die Folge der Zeiten schwächt daher die Verläßlichkeit unserer historischen Nachrichten eben so, wie sie allmählig die Denkmähler zerstört, welche wir den wichtigen Personen und Ereignissen der Geschichte aufgestellt haben. Die Buchdruckerkunst ist in der That eines der mächtigsten Mittel, diesem Verfalle entgegenzuwirken. Aber auch sie wird nicht verhindern können, daß endlich nach Jahrtausenden von physischen und moralischen Revolutionen, welche die Oberfläche der Erde zu allen Zeiten in Bewegung setzen, selbst diejenigen Thatsachen der Geschichte dunkel und zweifelhaft werden, die jetzt allgemein als vollkommen gewiß anerkannt sind.

IX. Wahrscheinlichkeit der Urtheilssprüche.

Ist $p + q$ die Anzahl der Richter eines Tribunals, von welchen p den Angeklagten verurtheilen und q ihn freysprechen, so ist die Wahrscheinlichkeit w eines in dem gesprochenen Urtheile zu befürchtenden Fehlers, wenn man der Kürze wegen $a = p + q + 1$ setzt,

$$w = \frac{1}{2^a}\left[1 + a + \frac{a \cdot a-1}{1 \cdot 2} + \frac{a \cdot a-1 \cdot a-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ldots + \frac{a \cdot a-1 \cdot a-2 \,..\, (a-q+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \,..\, q}\right]$$

Wird zur Gültigkeit des Ausspruches die Unanimität der Stimmen gefordert, so ist $q = 0$ und daher

$$w = \frac{1}{2^a}$$

Ex. Ist $p = 5$, $q = 3$ also $a = 9$ so ist

$$w = \frac{1}{2^9}\left(1 + 9 + \frac{9 \cdot 8}{2} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3}\right) = \frac{1}{2^9}(130) = 0.254$$ wie im Text.

Ist die Anzahl der Richter gleich 8, also $a = 9$ und wird die Unanimität der Stimmen gefordert, so ist

$$w = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512} = 0.00195.$$

Ist $p = 90$ und $q = 54$ also $a = 145$, so findet man

$$w = \frac{1}{773} = 0.0013$$

Ist $p = 112$ und $q = 100$, so findet man $w = \frac{1}{4.889} = 0.2045.$

Zweyte Abtheilung.

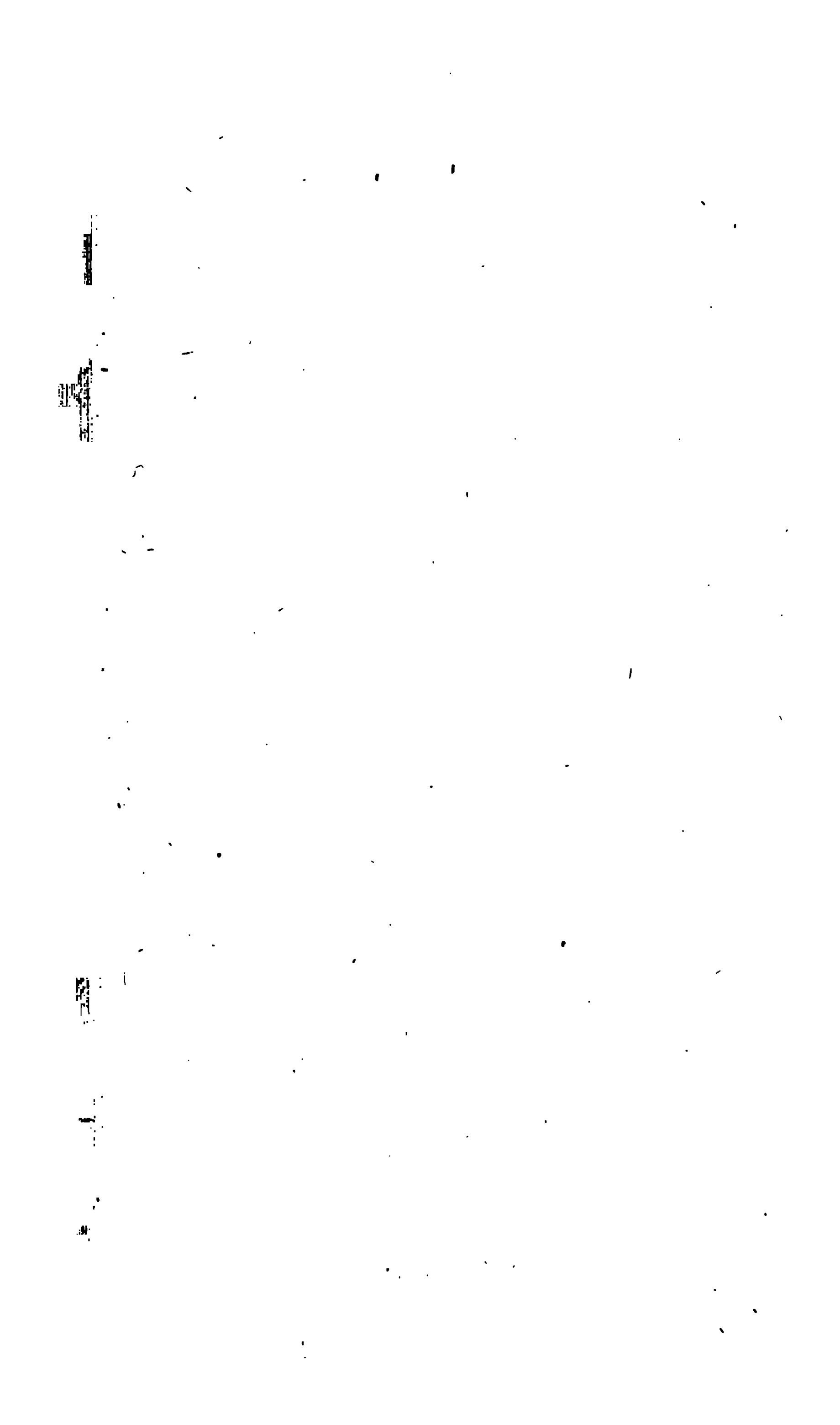
Methode der kleinsten Quadrate,

oder

Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung

auf

Beobachtungen.



Erstes Capitel.

---

§. 1. Seyen $x\ x_1\ x_2 ..$ die durch Beobachtungen unmittelbar
ltenen Größen, z. B. die Polhöhen des Beobachtungsortes,
N die Anzahl dieser Beobachtungen. Sind diese Beobach-
gen alle von gleichem Werthe, so daß man in Beziehung auf
Genauigkeit keinen Unterschied unter ihnen machen kann,
t der wahrscheinlichste Werth dieser Größen, den wir durch
ezeichnen wollen, gleich dem arithmetischen Mittel derselben,
: es ist

$$X = \frac{x + x_1 + x_2 + ..}{N}$$

r, wenn man der Kürze wegen $\Sigma x = x + x_1 + x_2 +$
, so ist

$$X = \frac{\Sigma x}{N}$$

§. 2. Es sey nun ε der Unterschied zwischen diesem wahr-
inlichsten Werthe X unserer Größe und dem unmittelbaren
ultate x der ersten Beobachtung, oder es sey $\varepsilon = X - x$
eben so
die zweyte Beobachtung $\varepsilon_1 = X - x_1$,
die dritte „ „ $\varepsilon_2 = X - x_2$ u. s. f.
Man kann diese Größen $\varepsilon\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 ..$ als die Fehler der ein-
en Beobachtungen ansehen. Bezeichnet man wieder der Kürze

wegen die Summe der Quadrate der Größen $\varepsilon^2 . \varepsilon_1^2 . \varepsilon_2^2$ . . durch $\Sigma \varepsilon^2$, so daß

$$\Sigma \varepsilon^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \text{ist,}$$

so heißt die Größe

$$P = \frac{N^2}{2 \Sigma \varepsilon^2}$$

das Gewicht jener Bestimmung von X als des wahrscheinlichsten Werthes von x. Man sieht, daß dieses Gewicht desto größer seyn wird, je größer die Anzahl N der Beobachtungen und je kleiner die Größen $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2$ . . das heißt, je genauer diese Beobachtungen selbst sind.

§. 3. Nennet man dann Φ den mittleren zu befürchtenden Fehler, den man bey der Bestimmung der Größe X (nach dem in §. 1. gezeigten Verfahren) begangen haben mag, so ist

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} = \frac{0.282095}{\sqrt{P}}$$

wo $\pi = 3.1415926$ das Verhältniß der Peripherie des Kreises zu seinem Durchmesser ist. Dieser mittlere zu befürchtende Fehler Φ ist die Summe der Producte jedes Fehlers der einzelnen Beobachtungen in seine Wahrscheinlichkeit.

§. 4. Von diesem mittleren zu befürchtenden Fehler unterscheidet sich der wahrscheinliche Fehler F, den man bey dieser Bestimmung von X begangen haben kann. Dieser Fehler F ist nämlich derjenige, von dem es gleich wahrscheinlich ist, daß man ihn begangen oder daß man ihn auch nicht begangen habe. Dieser wahrscheinliche Fehler ist

$$F = \frac{0.4769363}{\sqrt{P}}$$

§. 5. Die beyden Fehler Φ und F beziehen sich auf das Resultat X, welches man (durch das Verfahren des §. 1) aus den einzelnen Beobachtungen $x\ x_1\ x_2$ . . abgeleitet hat. Nennt man nun eben so f den wahrscheinlichen Fehler jeder einzelnen dieser Beobachtungen, so ist

$$f = 0.4769363 \sqrt{\frac{N}{P}},$$

die wahrscheinliche Gränze $f + \Delta f$ dieses Fehlers f ist

$$f \pm \Delta f = f . \left(1 + \frac{0.4769363}{\sqrt{N}}\right),$$

in allen diesen Ausdrücken wegen dem Wurzelzeichen die das- e enthaltende Größe immer mit den doppelten Zeichen $\pm$ tanden wird. Der letzte Ausdruck sagt daher, daß der wahre, lich statthabende Werth von f zwischen die beyden Gränzen en wird:

$$f\left(1 + \frac{0.4769363}{\sqrt{N}}\right), \text{ und}$$

$$f\left(1 - \frac{0.4769363}{\sqrt{N}}\right),$$

r daß man 1 gegen 1 wetten kann, daß der wahre Werth von vischen diese beyden Größen fallen wird.

§. 6. Um aber auch die Wahrscheinlichkeit w zu finden, daß e der bisher bestimmten Größen, daß z. B. der mittlere zu be- htende Fehler Φ des Resultates X zwischen zwey andere, will- rliche Gränzen falle, so findet man die Wahrscheinlichkeit w, diese Größe Φ zwischen den Gränzen $\pm \frac{r}{\sqrt{P}}$ liege, wo r ir- d eine willkührliche Größe, und, wie zuvor, $P = \frac{N^2}{2 \Sigma \varepsilon^2}$ ist,

$$w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2} dr,$$

e = 2.7182818 die Basis der natürlichen Logarithmen ist, wo das Integral von r = 0 bis r = ∞ genommen wird. n findet aber für dieses Integral, wenn $r < 1$ ist

$$\ldots^{-r^2} dr = r - \frac{r^3}{3} + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{r^5}{5} - \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{r^7}{7} + \frac{1}{1.2.3.4} \cdot \frac{r^9}{9} -$$

r

$$\ldots^{-r^2} dr = \frac{r}{e^{r^2}} \left[1 + \frac{2r^2}{1.3} + \frac{(2r^2)^2}{1.3.5} + \frac{(2r^2)^3}{1.3.5.7} + \ldots \right]$$

und wenn $r > 1$ ist,

$$\int e^{-r^2}\,dr = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{1}{2r \cdot e^{r^2}}$$

$$\left[1 - \frac{1}{2r^2} + \frac{1.3}{(2r^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2r^2)^3} + \frac{1.3.5.7}{(2r^2)^4} - \ldots\right.$$

Entwickelt man diese Ausdrücke für einige Werthe von r, die vorhergehende Gleichung

$$w = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-r^2}\,dr$$

folgende kleine Tafel:

r	w	$\frac{w}{1-w}$
0.4769363	0.5	1.0000000
0.5951161	0.6	1.5000000
0.7328691	0.7	2.3333333
0.9061939	0.8	4.0000000
1.0000000	0.8427008	5.3572874
1.1630872	0.9	9.0
1.8213864	0.99	99.0
2.3276754	0.999	999.0
2.7510654	0.9999	9999.0
∞	1.0000000	∞

Diese Tafel zeigt z. B., daß die Wahrscheinlichkei der Fehler Φ zwischen den Gränzen $\pm \frac{1}{\sqrt{P}}$ liege, $w = 0.8427008$, und daß also auch die Wahrschei des Gegentheiles, daß Φ nicht zwischen diesen Gränzen liege $1 - w = 0.1572992$ ist, weil jede Wahrscheinlichkeit, daß ein Fall eintrete, und die, daß er nicht eintrete, zusamme der Wahrheit d. h. gleich 1 ist. Man kann daher die G

gegen $1 - w$ d. h., man kann die Größe $\frac{w}{1-w} = 5.3572874$ gegen die Einheit wetten, daß der Fehler Φ zwischen den Gränzen $\pm \frac{1}{\sqrt{P}}$ enthalten, oder mit andern Worten, daß der Fehler Φ kleiner als $\frac{1}{\sqrt{P}}$ ist. Eben so kann man 9999 gegen 1 oder nahe 10000 gegen 1 wetten, daß der Fehler Φ kleiner als $\frac{2.7510654}{\sqrt{P}}$ ist; aber man kann nur 4 gegen 1 wetten, daß der Fehler Φ kleiner als $\frac{0.9061939}{\sqrt{P}}$ ist u. s. w.

§. 7. Wir wollen nun auf das Vorhergehende ein Beyspiel anwenden, um den Gebrauch der bisher aufgestellten Ausdrücke deutlich zu machen.

Zehn Beobachtungen unsers Meridiankreises haben folgende Polhöhen der Wiener Sternwarte gegeben:

$$\begin{aligned} x &= 48^\circ\, 12'\, 35.''2 \\ x_1 &= 34.6 \\ x_2 &= 35.4 \\ x_3 &= 35.0 \\ x_4 &= 34.2 \\ x_5 &= 34.7 \\ x_6 &= 35.4 \\ x_7 &= 34.8 \\ x_8 &= 35.6 \\ x_9 &= 35.2 \end{aligned}$$

Arithm. Mittel $X = 48^\circ\, 12'\, 35.''01 = \frac{\Sigma x}{N}$, wo $N = 10$ ist.

Dieser Werth von X ist also der wahrscheinlichste Werth der Polhöhe jenes Beobachtungsortes, wie er aus diesen zehn Beobachtungen folgt.

I. Es sind aber die Differenzen dieses Resultates X von den einzelnen Beobachtungen

$X - x = \varepsilon = 35.01 - 35.2$, oder

$\varepsilon = -0.19$, und	ε^2	$= 0.0361$
$\varepsilon_1 = 0.41$	ε^2_1	$= 0.1861$
$\varepsilon_2 = -0.39$	ε^2_2	$= 0.1521$
$\varepsilon_3 = 0.01$	ε^2_3	$= 0.0001$
$\varepsilon_4 = 0.81$	ε^2_4	$= 0.6561$
$\varepsilon_5 = 0.31$	ε^2_5	$= 0.0961$
$\varepsilon_6 = -0.39$	ε^2_6	$= 0.1521$
$\varepsilon_7 = 0.21$	ε^2_7	$= 0.0441$
$\varepsilon_8 = -0.59$	ε^2_8	$= 0.3481$
$\varepsilon_9 = -0.19$	ε^2_9	$= 0.0361$
	$\Sigma\varepsilon^2$	$= 1.7070$

Dieses vorausgesetzt ist das Gewicht P der vorhergehenden stimmung von X

$$P = \frac{N^2}{2\Sigma\varepsilon^2} = 29.291.$$

Der mittlere zu befürchtende Fehler Φ dieses Resultates X i

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} = \pm\ 0.''0521.$$

Der wahrscheinliche Fehler F dieses Resultates ist

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}} = \pm\ 0.0881.$$

Endlich ist der wahrscheinliche Fehler f jeder einzelnen achtung

$$f = 0.47694\sqrt{\frac{N}{P}} = \pm\ 0.2787,$$

und die wahrscheinliche Gränze $f + \Delta f$ dieses letzten Fehlers

$$f \pm \Delta f = f\left(1 \pm \frac{0.47694}{\sqrt{N}}\right),$$

das heißt

$$0.2787 \pm 0.0420 = \begin{matrix} 0.3207 \\ 0.2367 \end{matrix}.$$

Man kann daher sagen, daß mit diesem Instrumente unter
ns gleichen Umständen, jede einzelne Beobachtung dieser
em wahrscheinlichen Fehler 0.″28 unterworfen ist, und daß
Fehler in der Ordnung nicht größer als 0.″32, und nicht
r als 0.″24 seyn wird, und dieser Schluß wird desto ge-
seyn, je größer die ihm zu Grunde gelegte Anzahl von
achtungen gewesen ist.

II. Welches ist aber die Wahrscheinlichkeit w, daß die Grän-
Φ des mittleren zu befürchtenden Fehlers die Größe

$$\Delta\Phi = \pm \frac{r}{\sqrt{P}}$$

übersteige, oder daß der mittlere zu befürchtende Fehler klei-

oder wenigstens nicht größer als $\frac{r}{\sqrt{P}}$ sey?

Sey r = 0.4769363, so ist

$$\Delta\Phi = \frac{0.4769363}{5.4121} = 0.0881,$$

a zu diesem r in der Tafel des §. 6. der Werth $w = 0.5$,

$\frac{w}{1-w} = 1$ gehört, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der

r $\Delta\Phi$ nicht größer als 0.0881 sey, gleich 0.5, oder man
1 gegen 1 wetten, daß der Fehler, den man in der Be-
ung von X begangen hat, nicht größer als 0.0881 sey.
ist der wahrscheinliche Fehler F des Resultates X in N. I
alls gleich dieser Größe 0.0881 gefunden worden.

Für r = 1 gibt die Tafel $\frac{w}{1-w} = 5.357$, und

$$\Delta\Phi = \frac{1}{5.4121} = 0.1848,$$

=2.32767 gibt die Tafel $\frac{w}{1-w} = 999$, und

$$\Delta\Phi = \frac{2.32767}{5.4121} = 0.4301.$$

Man kann also 5.357 gegen 1 wetten, daß die obige Bestimmung von Φ nicht über 0."1848, und man kann 999 gegen 1 oder nahe 1000 gegen 1 wetten, daß diese Bestimmung nicht über 0."4301 fehlerhaft ist.

§. 8. Die vorhergehenden Bestimmungen lassen sich noch zur Rechnung etwas bequemer machen, ohne dadurch der Genauigkeit der Resultate in Φ, F und f bedeutend zu schaden. Man kann nämlich statt der bisher gebrauchten Summe der Quadrate der Fehler $\Sigma\varepsilon^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 +$ auch die Summe dieser Fehler selbst, oder die Größe $\Sigma\varepsilon = \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots$ einführen, wo aber dann alle diese Größen $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots$ positiv genommen werden müssen. Dieses vorausgesetzt, findet man für den wahrscheinlichen Fehler f jeder einzelnen Beobachtung den genäherten Ausdruck

$$f = 0.84535\ \frac{\Sigma\varepsilon}{N}.$$

In unserem Beyspiele ist $\Sigma\varepsilon = 3.50$, also

$$f = 0.296$$

nur 0.017 von dem im §. 7. verschieden.

Setzt man also diese beyden Werthe von f einander gleich, so erhält man

$$0.84535\ \frac{\Sigma\varepsilon}{N} = 0.47694\ \sqrt{\frac{N}{P}},$$

oder das Gewicht

$$P = 0.31831\ \frac{N^3}{(\Sigma\varepsilon)^2}.$$

Ist so P gefunden, so hat man, wie im §. 7., die genäherten Werthe

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}},$$

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}},$$

$$f = 0.47694\ \sqrt{\frac{N}{P}}, \text{ und}$$

$$\Delta f = f\left(1 \pm \frac{0.47694}{\sqrt{N}}\right).$$

In unserem Beyspiele ist, wenn alle ε positiv genommen werden, $\Sigma\varepsilon = 3.50$, also

$$P = 25.984,$$
$$\Phi = 0.055,$$
$$F = 0.094,$$
$$f = \pm 0.296,$$

$$\Delta f = 0.296 \pm 0.045 = \begin{matrix} 0.341 \\ 0.251 \end{matrix},$$

welche Werthe nicht beträchtlich von denen des §. 7. verschieden sind.

§. 9. Ist überhaupt f der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Beobachtung, und g der Grad ihrer Präcision (Genauigkeit), und ist eben so F der wahrscheinliche Fehler des Resultates aus mehreren Beobachtungen, und G die Genauigkeit dieses Resultates, so ist

$$\frac{F}{f} = \frac{g}{G}.$$

Also auch, wenn man die Genauigkeit g der einzelnen Beobachtungen zur Einheit annimmt, die Genauigkeit des Resultates

$$G = \frac{f}{F}.$$

Substituirt man hier die obigen Werthe von f und F, so ist

$$G = \sqrt{N},$$

also in unserem Beyspiele

$$G = \sqrt{10} = 3.1623.$$

§. 10. Bisher haben wir die einzelnen Beobachtungen ohne Unterschied von gleichem Werthe vorausgesetzt. Es sey nun $c\, c_1\, c_2 \ldots$ der Werth der 1, 2, 3 . . Beobachtung (so daß man die 2 zweymal, die 3 dreymal besser voraussetzt, als die erste

wenn $c=1$, $c_1=2$, $c_2=3$ ist), so hat man für den wahrscheinlichsten Werth des Resultates

$$X=\frac{c^2x+c^2_1x+c_2^2x+c_3^2x+}{c^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2+}=\frac{\Sigma c^2x}{\Sigma c^2}.$$

Sucht man dann wieder die Größe

$$\varepsilon=X-x,\ \varepsilon_1=X-x_1,\ \varepsilon_2=X-x_2\ldots,$$

und setzt man

$$\Sigma c^2\varepsilon^2=c^2\varepsilon^2+c_1^2\varepsilon_1^2+c_2^2\varepsilon_2^2+$$

so erhält man für P, Φ, $F\ldots$ die Ausdrücke

$$P=\frac{N}{2}\cdot\frac{\Sigma c^2}{\Sigma c^2\varepsilon^2},\quad \Phi=\frac{0.282095}{\sqrt{P}},\quad F=\frac{0.47694}{\sqrt{P}},$$

$$G=\sqrt{\Sigma c^2},\quad f=0.47694\sqrt{\frac{\Sigma c^2}{P}},$$

$$f+\Delta f=f\left(1+\frac{0.47694}{\sqrt{\Sigma c^2}}\right),$$

wo f der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung, deren Genauigkeit als Einheit genommen wird, und wo G die Genauigkeit des Resultates X bezeichnet, wenn die Genauigkeit einer Beobachtung als Einheit genommen wird.

Endlich ist der wahrscheinliche Fehler

der ersten Beobachtung

$$\frac{f}{c},$$

der zweyten Beobachtung

$$\frac{f}{c_1},$$

der dritten Beobachtung

$$\frac{f}{c_2}\ \text{u. s. w.}$$

Setzt man in diesen Ausdrücken $c = c_1 = c_2 \ldots = 1$, $\Sigma c^2 \varepsilon^2 = \Sigma \varepsilon^2$ und $\Sigma c^2 = N$, und man erhält die Glei-
[ch]ungen des §. 7. wieder.

Exempel. Seyen die drey Polhöhen gegeben

[...]°	12′	33″	und der Werth dieser Beobachtung sey	$c = 1$
[...]	12	34	„ „ „ „	$c_1 = 2$
[...]	12	35	„ „ „ „	$c_2 = 3$

[...]t man

$$\begin{array}{ll} c^2\, x = 33 & c^2 = 1 \\ c^2_1\, x = 136 & c^2_1 = 4 \\ c^2_2\, x = 315 & c^2_2 = 9 \\ \hline \Sigma c^2 x = 484 & \Sigma c^2 = 14 \end{array}$$

$$= \frac{\Sigma c^2 x}{\Sigma c^2} = 34.571,\ \varepsilon = X - x = 1.571,\ c^2\, \varepsilon^2 = 2.468$$

$$\varepsilon_1 = X - x_1 = 0.571,\ c^2_1\, \varepsilon^2_1 = 1.304$$

$$\varepsilon_2 = X - x_2 = -0.429,\ c^2_2\, \varepsilon^2_2 = 1.656$$

$$\Sigma c^2 \varepsilon^2 = 5.428$$

[Ma]n hat daher

$$\begin{array}{ll} X = 34.''571 & F = 0.240 \\ P = 3.959 & G = 3.742 \\ \Phi = 0.142 & f = 0.415 \end{array}$$

[...] der wahrscheinliche Fehler

[der] ersten Beobachtung

$$\frac{f}{c} = 0.415,$$

[der] zweyten Beobachtung

$$\frac{f}{c_1} = 0.207,$$

[der] dritten Beobachtung

$$\frac{f}{c_2} = 0.138,$$

[...] man kann 1000 gegen 1 wetten, daß der Fehler von X nicht
[grö]ßer ist als 1.″17.

Hätte man in diesem Beyspiele $c = c_1 = c_2 = 1$ genomme[n], so würde man nach §. 7. erhalten haben

$$X = \frac{\Sigma x}{N} = 34.''00, \quad \Sigma \varepsilon^2 = 2,$$

$$P = 2.25, \quad \Phi = 0.188, \quad F = 0.318$$

$$f = 0.551$$

$$G = 1.732,$$

und man kann 1000 gegen 1 wetten, daß der Fehler von X nic[ht] größer ist als 1.''55.

Zweytes Capitel.

11. Es werde nun durch eine Anzahl von Beobachtungen
jend eine Größe gesucht, deren Werth man schon beynahe kennt
h. für welche man schon einen genäherten analytischen Aus-
uck hat. Man soll diesen Ausdruck durch Hülfe jener Beobach-
ngen genauer bestimmen.

Um diesen Gegenstand sogleich durch ein Beyspiel zu fixiren,
ist bekanntlich der Höhenunterschied in Toisen von zwey Orten,
welchen man die Barometerhöhen b und b′ beobachtet hat,
eich

$$B = 9437 \log \frac{b}{b'},$$

enn man die Correctionen wegen der Temperatur und Polhöhe
er, der Kürze wegen, vernachlässiget. Da aber dieser Factor 9437,
n welchem die Bestimmung des Höhenunterschiedes zweyer Orte
rzüglich abhängt, noch keineswegs genau bekannt ist, so wollen
ir die Verbesserung desselben mit x bezeichnen, so daß der wahre
Werth dieses Factors gleich 9437 + x, und daß daher der wahre
lusdruck der Höhendifferenz gleich

$$(9437 + x) \log \frac{b}{b'}.$$

Toisen seyn soll, in welchem die Correction x noch
kannt ist.

Beobachtet man nun in der That an zwey Orten die B
meterhöhen, und kennt man zugleich aus andern unmittelb
z. B. aus trigonometrischen Messungen die wahre Höhendiff
A dieser beyden Orte, so wird man, da auch

$$(9437 + x) \log \frac{b}{b'}$$

diese wahre Höhendifferenz ausdrückt, die Gleichung erhalter

$$A = (9437 + x) \log \frac{b}{b'}, \text{ oder}$$

$$A = B + x \log \frac{b}{b'} \ldots (I),$$

und da in dieser Gleichung bloß die unbekannte Größe x
kommt, so wird man sie durch diese Gleichung selbst bestim
können, und so den wahren Werth $9437 + x$ jenes Factor
halten.

I. Sey z. B. auf der untern dieser beyden Stationen
Barometerhöhe $b = 27.27$ Zoll, und auf der obern $b' = 22$
beobachtet worden. Eine trigonometrische Messung aber habe
wahre Höhendifferenz dieser beyden Stationen gleich

$$A = 794.5$$

Toisen gegeben. Wir haben daher

$$\log \frac{b}{b'} = 0.084082, \text{ und}$$

$$B = 9437 \log \frac{b}{b'} = 793.482,$$

und die vorhergehende Gleichung (I) geht daher in folgende ü

$$A = B + 0.084082\, x,$$

wo aus der Berechnung $B = 793.482$, und aus der unmi
baren trigonometrischen Messung $A = 794.5$ folgt.

Allein das Resultat A dieser Messung kann, da sie w
aus einer Beobachtung, wenn gleich aus einer viel genaueren,
die der Barometerhöhen, abgeleitet ist, ebenfalls nicht als g
wahr angesehen werden. Nehmen wir daher an, daß e

Fehler dieser Messung sey, oder daß $A+\varepsilon$ der wahre Werth der Größe A sey, so wird die letzte Gleichung seyn

$$A + \varepsilon = B + 0.084082\, x,$$

oder wenn man die Differenz der unmittelbaren Messung, und der Rechnung nach der aufgestellten Formel, d. h. wenn man die Größe $A-B$ gleich δ setzt,

$$\delta + \varepsilon = 0.084082\, x,$$

oder endlich überhaupt, wenn man den Coefficienten von x durch a bezeichnet,

$$\varepsilon = a\,x - \delta,$$

und dieß ist die Bedingungsgleichung der ersten Beobachtung, in welcher also a und δ bekannte Größen, x die zu bestimmende Größe, und ε der noch unbekannte Fehler der ersten Messung ist. Eine zweyte Beobachtung wird eben so die Bedingungsgleichung

$$\varepsilon_1 = a_1\, x - \delta_1,$$

und eine dritte die Gleichung

$$\varepsilon_2 = a_2\, x - \delta_2$$

geben u. s. f., und es wird nun darauf ankommen, denjenigen Werth der Größe x zu finden, der allen diesen Bedingungsgleichungen am besten entspricht.

Die Theorie der kleinsten Quadrate zeigt, das dieser Werth der Größe x, oder daß der wahrscheinlichste Werth X derselben derjenige ist, für welchen die Summe der Quadrate aller Beobachtungsfehler $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots$ ein Kleinstes ist, oder für welchen man hat

$$d\,.\,(\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots) = 0.$$

Substituirt man aber in dieser Gleichung für $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots$ ihre vorhergehenden Werthe, so hat man

$$d.(a\,x - \delta)^2 + d.(a_1\, x - \delta_1)^2 + d.(a_2\, x - \delta_2)^2 + \ldots = 0,$$

oder

$$x\,(a^2 + a_1^2 + a_2^2 +) - (a\,\delta + a_1\,\delta_1 + a_2\,\delta_2 + \ldots) = 0,$$

oder endlich, wenn man wieder die oben eingeführten Abkürz
zeichen braucht,

$$x \,.\, \Sigma a^2 - \Sigma \,.\, a\delta = 0,$$

das heißt, da der durch diese Gleichung bestimmte Werth v
der wahrscheinlichste von allen ist, den wir mit X bezei
haben,

$$X = \frac{\Sigma \,.\, a\delta}{\Sigma a^2},$$

$$\text{wo } \Sigma a\delta = a\delta + a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + \ldots, \text{ und}$$
$$\Sigma a^2 = a^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots \text{ ist.}$$

§. 13. Hat man so den wahrscheinlichsten Werth X
Größe x gefunden, so wird man die Größen P, Φ, F, f u
im Allgemeinen nach ähnlichen Ausdrücken mit denen bestimm
welche wir im §. 3. und 4. u. s. w. gegeben haben.

Setzt man nämlich

$$\Sigma \varepsilon^2 = (aX - \delta)^2 + (a_1 X - \delta_1)^2 + (a_2 X - \delta_2)^2 +,$$

so findet man für das Gewicht P jener Bestimmung des R
tates X den Ausdruck

$$P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\Sigma a^2}{\Sigma \varepsilon^2},$$

wo wieder N die Anzahl der Beobachtungen ist.

Um die Größe $\Sigma \varepsilon^2$ zur Rechnung bequemer zu machen,
man, wenn man den gegebenen Ausdruck von $\Sigma \varepsilon^2$ entwickelt,

$$\begin{aligned}\Sigma \varepsilon^2 &= X^2 (a^2 + a_1^2 + a_2^2 +), \\ &- 2X(a\delta + a_1\delta_1 + a_2\delta_2 +), \\ &+ \delta^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 +,\end{aligned}$$

oder kürzer ausgedrückt

$$\Sigma \varepsilon^2 = X^2 \Sigma a^2 - 2X \Sigma a\delta + \Sigma \delta^2,$$

oder endlich da

$$X = \frac{\Sigma a\delta}{\Sigma a^2} \text{ war},$$

$$\Sigma\varepsilon^2 = \frac{(\Sigma a\delta)^2}{\Sigma a^2} - \frac{2(\Sigma a\delta)^2}{\Sigma a^2} + \Sigma\delta^2,$$

$$\Sigma\varepsilon^2 = \Sigma\delta^2 - \frac{(\Sigma a\delta)^2}{\Sigma a^2}.$$

man also durch diese Gleichung den Werth von $\Sigma\varepsilon^2$ ge-
so ist

$$P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\Sigma a^2}{\Sigma\varepsilon^2},$$

it man so den Werth von P, so ist der mittlere zu be-
e Fehler des Resultates X gleich

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} = \frac{0.282095}{\sqrt{P}},$$

scheinliche Fehler dieses Resultates

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}},$$

Genauigkeit (Präcision) dieser Bestimmung des Resul-
ie Genauigkeit der einzelnen Beobachtungen als Einheit
setzt,

$$G = \frac{f}{F} = \sqrt{\Sigma a^2}.$$

st der wahrscheinliche Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{\Sigma a^2}{P}},$$

vahrscheinlichen Gränzen desselben

$$f \pm \Delta f = f\left(1 \pm \frac{0.47694}{\sqrt{N}}\right).$$

Man bemerkt von selbst, daß diese Ausdrücke von
F.. in die des §. 7. übergehen, wenn man hier die
$= a_1 = a_2 ..$ gleich 1, und $\delta\ \delta_1\ \delta_2 ..$ gleich $x\ x_1\ x_2 ..$
durch $\Sigma a^2 = a^2 + a^2 + a^2 .. = N$ wird.
h zeigt schon der Ausdruck für P, daß das Gewicht des
es X desto größer wird, je größer die Anzahl N der

Beobachtungen, und je kleiner $\Sigma \varepsilon^2$ ist d. h. je genau Beobachtungen sind, und endlich je größer die Factoren a a der Größe x in den Bedingungsgleichungen sind: überei mend mit dem, was §. 11. I. gesagt worden ist. Je größe für alle diese Fälle die Größe P wird, desto kleiner werden die Größen Φ F und f.

§. 14. Wenden wir diese Ausdrücke auf folgendes spiel an:

$$1.50\, x - 0.72 = \varepsilon$$
$$1.46\, x - 0.68 = \varepsilon_1$$
$$1.52\, x - 0.82 = \varepsilon_2$$
$$1.43\, x - 0.78 = \varepsilon_3$$
$$1.48\, x - 0.69 = \varepsilon_4.$$

Hier ist also

$$a = 1.50 \qquad a_1 = 1.46$$
$$\delta = 0.72 \qquad \delta_1 = 0.68 \text{ u. f.,}$$

also auch

$a^2 =$	2.2500	$\delta^2 =$	0.5184	$a\,\delta =$	1.080[illegible]
$a_1^2 =$	2.1316	$\delta_1^2 =$	0.4624	$a_1\delta_1 =$	0.992[illegible]
	2.3104		0.6724		1.246[illegible]
	2.0449		0.6084		1.115[illegible]
	2.1904		0.4761		1.021[illegible]
$\Sigma a^2 =$	10.9273	$\Sigma \delta^2 =$	2.7377	$\Sigma a\,\delta =$	5.455[illegible]

Daraus folgt

$$\Sigma \varepsilon^2 = \Sigma \delta^2 - \frac{(\Sigma a\,\delta)^2}{\Sigma a^2} = 0.0137, \text{ und}$$

$$X = \frac{\Sigma a\,\delta}{\Sigma a^2} = 0.49928, \text{ und da } N = 5 \text{ ist,}$$

$$P = 1994.033$$
$$\Phi = 0.00632$$
$$F = 0.01068$$
$$G = 3.3056$$
$$f = 0.03531$$
$$f \pm \Delta f = \begin{matrix} 0.04284 \\ 0.02778 \end{matrix}$$

Die Größen P und G sind hier so groß, oder die Φ und F klein, weil die einzelnen Beobachtungen so wenig von einander verschieden, oder weil die Beobachtungen so genau sind, wie auch der kleine Werth von f, des Fehlers jeder einzelnen Beobachtung, so wie der ebenfalls sehr kleine Werth von $\Sigma\varepsilon^2$, der Summe der Quadrate aller Beobachtungsfehler, zeigt.

In einem zweyten Beyspiele sey

$$\begin{aligned}
2.1\,x - 2.5 &= \varepsilon \\
3.2\,x - 5.0 &= \varepsilon_1 \\
2.4\,x - 4.5 &= \varepsilon_2 \\
4.0\,x - 5.0 &= \varepsilon_3 \\
3.5\,x - 4.1 &= \varepsilon_4.
\end{aligned}$$

Addirt man alle diese Gleichungen, so erhält man, wenn man alle $\varepsilon = 0$ setzt, $15.2x - 21.1 = 0$, oder $x = 1.388$ für das arithmethische Mittel dieser Größe, welches aber nicht der wahrscheinlichste Werth X derselben ist.

Nach dem Vorhergehenden geben jene fünf Gleichungen
$\Sigma a^2 = 48.66$, $\Sigma \delta^2 = 93.31$, $\Sigma a\delta = 66.40$ und $N = 5$,
also ist

$$\Sigma\varepsilon^2 = 93.31 - 90.6075 = 2.7025,$$

der wahrscheinlichste Werth

$$\begin{aligned}
X &= 1.36457 \\
P &= 45.01387 \\
\Phi &= 0.04204 \\
F &= 0.07109 \\
G &= 6.97567 \\
f &= 0.49588 \\
f \pm \Delta f &= \begin{cases} 0.60164 \\ 0.39012. \end{cases}
\end{aligned}$$

Nach der Tafel des §. 6. ist für

$r = 1.8213861$ der Werth von $\Delta\Phi = \frac{r}{\sqrt{P}} = 0.271$, und für

$r = 2.32767$ der Werth von $\Delta\Phi = \frac{r}{\sqrt{P}} = 0.347$;

also kann man 100 gegen 1 wetten, daß der Fehler von X ni
größer als 0.271, und 1000 gegen 1 wetten, daß der Feh
von X nicht größer als 0.347 ist.

I. Auch hier könnte man, wie im §. 8., wieder die Grö
$\Sigma \varepsilon^2$ vermeiden, indem man

$$f = 0.84535 . \frac{\Sigma \varepsilon}{N}$$

einführt, wo $\Sigma \varepsilon$ die Summe der Größen

$$\varepsilon = X a - \delta, \ \varepsilon_1 = X a_1 - \delta_1, \ \varepsilon_2 = X a_{11} - \delta_{11} \ldots,$$

diese Differenzen alle positiv genommen, bezeichnet. Setzt n
nämlich diesen Werth von f gleich dem vorhergehenden

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{\Sigma a^2}{P}},$$

so findet man

$$P = 0.31831 . \frac{N^2 . \Sigma a^2}{(\Sigma \varepsilon)^2},$$

und dann die übrigen Größen Φ, F, f.. wie im §. 13. In
serem zweyten Beyspiele ist

$\varepsilon = X a - \delta =$	0.36566
ε_1	— 0.63328
ε_2	— 1.22496
ε_3	0.45840
ε_4	0.67610
$\Sigma \varepsilon =$	3.35840

wenn alle ε positiv genommen werden. Ferner ist

$$N = 5, \ \Sigma a^2 = 48.66,$$

also nach der letzten Gleichung

$$P = 34.332$$
$$\Phi = 0.048$$
$$F = 0.081 \text{ u. s. w.}$$

Allein die Berechnung der Größe P nach der Gleichung

$$P = \frac{N}{2} . \frac{\Sigma a^2}{\Sigma \varepsilon^2}$$

des §. 13. ist nicht nur genauer, sondern auch bequemer,
man den Werth von $\Sigma \varepsilon^2$ sogleich aus dem Ausdrucke

$$\Sigma\varepsilon^2 = \Sigma\delta^2 - \frac{(\Sigma a\delta)^2}{\Sigma a^2},$$

erhält, während man den Werth von $\Sigma\varepsilon$ nicht aus dem analogen Ausdrucke

$$\Sigma\varepsilon = X\Sigma a - \Sigma\delta = \frac{\Sigma a\delta}{\Sigma a} - \Sigma\delta$$

finden kann, weil vorausgesetzt wird, daß alle ε positiv genommen werden, daher man hier die Werthe aller ε unmittelbar aus den primitiven Gleichungen

$$\varepsilon = a X - \delta, \quad \varepsilon_1 = a_1 X - \delta_1 \ldots$$

berechnen muß.

§. 15. Das Vorhergehende setzt voraus, daß die Werthe aller Bedingungsgleichungen unter sich gleich groß sind.

Ist aber von der Bedingungsgleichung

$\varepsilon = a x - \delta$ der Werth c, und von

$\varepsilon_1 = a_1 x - \delta_1$ „ c_1,

$\varepsilon_2 = a_2 x - \delta_2$ „ c_2 u. s. w.,

so hat man für die Größen X, P, Φ.. folgende Ausdrücke, wo wieder

$$\varepsilon = a X - \delta, \quad \varepsilon_1 = a_1 X - \delta_1$$

u. s. f. ist.

$$X = \frac{\Sigma c^2 a\delta}{\Sigma c^2 a^2}, \quad P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\Sigma c^2 a^2}{\Sigma c^2 \varepsilon^2} \quad F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}},$$

$$\Phi = \frac{0.28209}{\sqrt{P}}, \quad G = \sqrt{\Sigma c^2 a^2}$$

$$f = 0.47694\sqrt{\frac{\Sigma c^2 a^2}{P}} = 0.47694\sqrt{\frac{\Sigma c^2 a^2}{P}}$$

$$f + \Delta f = f\left(1 \pm \frac{0.47694}{\sqrt{N}}\right).$$

Setzt man in diesen Ausdrücken

$$c = c_1 = c_2 \ldots = 1,$$

so ist

$$\Sigma c^2 a\delta = \Sigma a\delta, \quad \Sigma c^2 a^2 = \Sigma a^2, \quad \Sigma c^2 \varepsilon^2 = \Sigma\varepsilon^2,$$

und man erhält die Gleichungen des §. 13. wieder.

Exempel. Seyen die Bedingungsgleichungen gegeben

$$2x - 2.5 = \varepsilon \quad \text{mit dem Werthe} \quad c = 1$$
$$3x - 5.0 = \varepsilon_1 \quad „ \quad „ \quad c_1 = 2$$
$$4x - 6.0 = \varepsilon_2 \quad „ \quad „ \quad c_2 = 3,$$

so daß also die zweyte Beobachtung einen zwey Mahl, und d dritte einen drey Mal größeren Werth hat, als die erste.

Diese Gleichungen geben

$c^2 a^2 =$	4	$c^2 a \delta =$	5
	36		60
	144		216
$\Sigma c^2 a^2 =$	184	$\Sigma c^2 a \delta =$	281

also ist

$$X = \frac{\Sigma c^2 a \delta}{\Sigma c^2 a^2} = 1.52717.$$

Mit diesem Werthe von X erhält man

$$\varepsilon = aX - \delta = 3.05434 - 2.5 = 0.5543,$$

und eben so

$$\varepsilon_1 = -0.4184, \text{ und } \varepsilon^2 = 0.1088, \text{ also ist}$$

$c^2 \varepsilon^2 =$	0.30736
	0.70024
	0.10653
$\Sigma c^2 \varepsilon^2 =$	1.11413

Es ist daher

$$P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\Sigma c^2 a\varepsilon}{\Sigma c^2 \varepsilon^2} = 247.7263,$$

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}} = 0.03030,$$

$$G = \sqrt{\Sigma c^2 a^2} = 13.565,$$

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{\Sigma c^2 a^2}{P}} = 0.41104.$$

§. 16. Allein man kann auch den Fall, wo die einze Beobachtungen ungleiche Werthe haben, unmittelbar auf den §. 13., wo sie alle gleiche Werthe haben, zurückführen, sonach die Ausdrücke des §. 15. ganz entbehren.

mn' man nämlich von den 'gegebenen Bedingungsglei-
jede durch ihren Werth $c \; c_1 \; c_2 \ldots$ multiplicirt, so kann
in annehmen, daß die so veränderten Gleichungen alle
Werth haben, und daher auf sie die Ausdrücke des
nmittelbar anwenden.

r das letzte Beyspiel hat man daher folgende Bedingungs-
jen, die alle denselben Werth haben

$$
\begin{aligned}
2\,x - 2.5 &= \varepsilon \\
6\,x - 10.0 &= \varepsilon_1 \\
12\,x - 18.0 &= \varepsilon_2.
\end{aligned}
$$

handelt man daher diese so modificirten Gleichungen nach
so erhält man

$$
\begin{array}{rrrrrr}
a^2 = & 4 & \delta^2 = & 6.25 & a\delta = & 5 \\
 & 36 & & 100 & & 60 \\
 & 144 & & 324 & & 216 \\
\hline
a^2 = & 184 & \Sigma\delta^2 = & 430.25 & \Sigma a\delta = & 281
\end{array}
$$

her

$$= \frac{\Sigma a\delta}{\Sigma a^2} = 1.52717,$$

$$= \Sigma\delta^2 - \frac{(\Sigma a\delta)^2}{\Sigma a^2} = 430.25 - 429.1358 = 1.1142,$$

$$= \frac{N}{2} \cdot \frac{\Sigma a^2}{\Sigma \varepsilon^2} = 247.7113,$$

$$= \frac{0.47694}{\sqrt{P}} = 0.03030,$$

$$= \sqrt{\Sigma a^2} = 13.565,$$

$$= 0.47694 \sqrt{\frac{\Sigma a^2}{P}} = 0.41105,$$

Werthe mit den vorhergehenden genau übereinstimmen.
nd noch die wahrscheinlichsten Fehler der ersten, zwey-
ritten Beobachtung in derselben Ordnung

$$\frac{f}{c} = 0.411, \; \frac{f}{c_1} = 0.205, \; \frac{f}{c_2} = 0.137.$$

§. 17. Man wird wohl nur selten im Stande seyn, diese Werthe $c\, c_1\, c_2 ..$ der einzelnen Beobachtungen, auch nur mit einiger Genauigkeit, anzugeben. Wenn man die einzelnen Bedingungsgleichungen, die man alle von gleichem Werthe voraussetzt, in Gruppen theilt, indem man mehrere derselben in eine Summe vereinigt, so kann man, wenn die erste, zweyte und dritte Gruppe aus $n\, n_1\, n_2 ..$ Beobachtungen entstanden ist, für die auf einander folgenden Bedingungsgleichungen dieser Gruppen die Werthe

$$c = \sqrt{n},\ c_1 = \sqrt{n_1},\ c_2 = \sqrt{n_2} ..$$

annehmen, und mit diesen Werthen von $c\, c_1\, c_2 ..$ wie im §. 16. verfahren.

Wenn man z. B. in dem Exempel des §. 14. die zwey ersten und die drey letzten Bedingungsgleichungen in eine Summe vereinigt, so erhält man zwey neue Bedingungsgleichungen

$$2.96\, x - 1.40 = \varepsilon \text{ mit dem Werthe } .. \sqrt{2}$$
$$4.43\, x - 2.29 = \varepsilon_1 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad .. \sqrt{3},$$

und man wird daher die Gleichungen

$$2.96\, x \sqrt{2} - 1.40 \sqrt{2} = \varepsilon$$
$$4.43\, x \sqrt{3} - 2.29 \sqrt{3} = \varepsilon_1$$

nach den Vorschriften des §. 13. behandeln können. Da aber bey diesem Verfahren die Eintheilung in Gruppen willkührlich ist, (indem man z. B. hier auch die drey ersten, und die zwey letzten Gleichungen hätte summiren können u. s. w.), und da überhaupt hier nicht, wie im §. 15. oder 16. in der That geschehen ist, jede einzelne der primitiven Gleichungen, sondern nur willkührliche Gruppen derselben berücksichtigt werden, so wird man durch dieses Verfahren nur überhaupt genäherte Werthe von X, F u. s. w., aber nicht genau dieselben Werthe erhalten können, die man erhält, wenn man jede einzelne der ursprünglichen Bedingungsgleichungen nach der Methode des §. 13. behandelt.

§. 18. Bey diesen Gruppirungen, oder auch bey Beobachtungen mit multiplicirenden Instrumenten, an welchen nicht die Resultate der einzelnen Beobachtungen, sondern nur die Resul-

tate einer bestimmten Anzahl derselben abgelesen werden, pflegt man öfters die folgenden Gruppen mit allen vorhergehenden zu vereinigen, um so die allmählige Annäherung zu einem stehenden Resultate gleichsam dem Auge sichtbar zu machen. Um dieß durch ein Beyspiel zu zeigen, so wurde für die Polhöhe von Mailand durch einen Multiplicationskreis gefunden

aus 10 Beobachtungen	45° 28′ 5.″0	$= a$
aus 15 andern Beobachtungen	4.5	$= a_1$
aus 25 „ „	5.1	$= a_2$
aus 30 „ „	4.8	$= a_3$

Vereinigt man die beyden ersten dieser Beobachtungen, so erhält man

$$\frac{10a + 15a_1}{25} = 45^\circ\ 28'\ 4.''7$$

als Resultat der 25 ersten Beobachtungen. Eben so geben die drey ersten Beobachtungen

$$\frac{10a + 15a_1 + 25a_2}{50} = 45^\circ\ 28'\ 4.''9$$

als Resultat der 50 ersten Beobachtungen. Endlich gibt die Vereinigung aller Beobachtungen

$$\frac{10a + 15a_1 + 25a_2 + 30a_3}{80} = 45^\circ\ 28'\ 4.''8625$$

als Resultat von 80 Beobachtungen. Wir haben daher aus

10 Beobachtungen	45° 28′ 5.″0	$= A$
25 „	4.7	$= A_1$
50 „	4.9	$= A_2$
80 „	4.8	$= A_3$

und diese Werthe von $A\ A_1\ A_2 \ldots$ zeigen die allmählige Annäherung an die zu findende Größe, während im Gegentheile die Werthe von $a\ a_1\ a_2 \ldots$ wieder die Übereinstimmung der partiellen Resultate unter einander darstellen.

Um beyden Zwecken zu genügen, wird man daher aus den Größen $A\ A_1\ A_2 \ldots$, wenn diese gegeben sind, die Größen $a_1\ a_2 \ldots$, und umgekehrt, ableiten.

Sey also überhaupt

a	das Resultat	aus	n	Beobachtungen
a_1	„	„	n_1	„
a_2	„	„	n_2 u. s. f., und eben so	
A	„	„	n	
A_1	„	„	$n + n_1$	
A_2	„	„	$n + n_1 + n_2$ u. s. f.,	

so hat man, wenn die Größen $a\ a_1\ a_2 \ldots$ gegeben sind,

$$A = a$$

$$A_1 = \frac{n a + n_1 a_1}{n + n_1}$$

$$A_2 = \frac{n a + n_1 a_1 + n_2 a_2}{n + n_1 + n_2}$$

$$A_3 = \frac{n a + n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3}{n + n_1 + n_2 + n_3} \text{ u. s. f.,}$$

und wenn die Größen $A\ A_1\ A_2 \ldots$ gegeben sind,

$$a = A$$

$$a_1 = \frac{n}{n_1}(A_1 - A) + A_1$$

$$a_2 = \frac{n + n_1}{n_2}(A_2 - A_1) + A_2$$

$$a_3 = \frac{n + n_1 + n_2}{n_3}(A_3 - A_2) + A_3$$

$$a_4 = \frac{n + n_1 + n_2 + n_3}{n_4}(A_4 - A_3) + A_4 \text{ u. s. f.}$$

In dem vorhergehenden Beyspiele ist

$n = 10$, $n_1 = 15$, $n_2 = 25$, $n_3 = 30$, und

$A = 5.0$, $A_1 = 4.7$, $A_2 = 4.9$, $A_3 = 4.8625$, also ist au

$$a = 5.0,$$

$$a_1 = \frac{10}{15}(-0.3) + 4.7 = 4.5$$

$$a_2 = \frac{25}{25}(0.2) + 4.9 = 5.1$$

$$a_3 = \frac{5}{3}(-0.0375) + 4.8625 = 4.8 \text{ wie zuvo}$$

Hätte man in einem zweyten Beyspiele aus den

10	ersten	Beobachtungen	erhalten		45° 28′ 5.″0	$= A$
20	„	„	„	„	5.55	$= A_1$
30	„	„	„	„	5.30	$= A_2$
40	„	„	„	„	5.275	$= A_3$
50	„	„	„	„	5.160	$= A_4$

so ist

$$n = n_1 = n_2 \ldots = 10,$$

und daher

$$\begin{aligned} a &= 45^\circ\ 28'\ 5.''0 \\ a_1 &= 2A_1 - A = 6.1 \\ a_2 &= 3A_2 - 2A_1 = 4.8 \\ a_3 &= 4A_3 - 3A_2 = 5.2 \\ a_4 &= 5A_4 - 4A_3 = 4.7. \end{aligned}$$

Drittes Capitel.

§. 19. Wir wollen nun auf eine ähnliche Weise zwey unbe-
kannte, durch mehrere Gleichungen gegebene Größen, zu be-
stimmen suchen. Um uns auch hier gleich durch ein Beyspiel zu
erklären, nehmen wir an, daß die Secundenpendellänge A für
die geographische Breite φ durch den Ausdruck gegeben werde

$$A = 439.23 + 2.39 \operatorname{Sin}^2 \varphi$$

in Pariser Linien, in welchen aber die beyden constanten Größen
439.23 und 2.39 noch nicht als ganz genau angesehen werden,
und daher einer Verbesserung bedürfen. Seyen diese zu suchenden
verbesserten Werthe

$$439.23 + x, \text{ und } 2.39 + y.$$

Hat man nun unter der Breite φ diese Pendellänge durch
unmittelbare Beobachtung gleich B gefunden, und nimmt man
an, daß auch diese Beobachtung nicht ganz richtig ist, und daß
der wahre, noch unbekannte Werth dieses Resultates gleich $B + \varepsilon$
ist, wo also ε den Fehler der Beobachtung bezeichnet, so hat
man, da sowohl $B + \varepsilon$, als auch

$$439.23 + x + (2.39 + y) \operatorname{Sin}^2 \varphi$$

den wahren Ausdruck der Pendellänge vorstellt,

$$B + \varepsilon = 439.23 + x + (2.39 + y) \operatorname{Sin}^2 \varphi,$$

und wenn man davon die vorhergehende Gleichung

$$A = 439.23 + 2.39 \operatorname{Sin}^2 \varphi$$

abzieht,

$$B - A + \varepsilon = x + y \operatorname{Sin}^2 \varphi,$$

er wenn man den Unterschied zwischen dem Resultate B der mittelbaren Beobachtung, und dem Resultate A der Berechng nach dem oben aufgestellten Ausdruck, d. h. wenn man — A = δ setzt.

$$\varepsilon = x + y \operatorname{Sin}^2 \varphi - \delta,$$

lches daher die Bedingungsgleichung dieser Beobachtung ist.

Wir wollen diese Bedingungsgleichung überhaupt durch

$$\varepsilon = a x + b y - \delta$$

rstellen. Eine zweyte Beobachtung gibt eben so

$$\varepsilon_1 = a_1 x + b_1 y - \delta_1,$$

ne dritte

$$\varepsilon_2 = a_2 x + b_2 y - \delta_2 \text{ u. s. w.},$$

ıd es wird nun darum zu thun seyn, diejenigen Werthe von und y zu finden, welche allen diesen Bedingungsgleichungen n besten entsprechen.

Diese Werthe von x und y werden aber, wieder, wie oben, ienigen seyn, für welche die Summe der Quadrate der Beobtungsfehler

$$\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots = \Sigma\varepsilon^2$$

ı Kleinstes ist, oder für welche man hat

$$d.\Sigma\varepsilon^2 = 0.$$

Da aber die Größen x und y im Allgemeinen von einander ıabhängig sind, so ist die letzte Gleichung folgenden beyden eich geltend

$$\left(\frac{d.\Sigma\varepsilon}{dx}\right)^2 = 0, \text{ und } \left(\frac{d.\Sigma\varepsilon}{dy}\right)^2 = 0.$$

ie erste dieser Gleichungen gibt, da

$$\varepsilon = a x + b y - \delta,$$

lso auch

$$\varepsilon^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + 2abxy - 2a\delta x - 2b\delta y + \delta^2 \text{ ist,}$$

$$\begin{aligned} & a^2 x + a (b y - \delta) \\ + & a_1^2 x + a_1 (b_1 y - \delta_1) \\ + & a_2^2 x + a_2 (b_2 y - \delta_2) + \ldots \end{aligned}$$

oder

$$x \Sigma a^2 + y \Sigma ab - \Sigma a\delta = 0 \ldots. (I),$$

und eben so gibt die zweyte jener Gleichungen

$$b^2\ y + b\ (a\ x - \delta)$$
$$b_1^2\ y + b_1\ (a_1\ x - \delta_1)$$
$$b_2^2\ y + b_2\ (a_2\ x - \delta_2) + \ldots$$

oder

$$y\Sigma b^2 + x\Sigma ab - \Sigma b\delta = 0 \ldots .(II).$$

Diese beyden Gleichungen (I) und (II) geben also die gesuchten wahrscheinlichsten Werthe von x und y, die wir wieder durch X und Y bezeichnen wollen.

Man erhält nämlich aus diesen beyden Gleichungen durch Elimination für diese wahrscheinlichsten Werthe die Ausdrücke

$$X = \frac{\Sigma b^2 \Sigma a\delta - \Sigma ab \Sigma b\delta}{\Sigma a^2 \Sigma b^2 - (\Sigma ab)^2}, \text{ und}$$

$$Y = \frac{\Sigma a^2 \Sigma b\delta - \Sigma ab \Sigma a\delta}{\Sigma a^2 \Sigma b^2 - (\Sigma ab)^2}.$$

Nennt man der Kürze wegen die Größe

$$\Sigma a^2 \Sigma b^2 - (\Sigma ab)^2 = k,$$

so ist

$$X = \frac{\Sigma b^2 \Sigma a\delta - \Sigma ab \Sigma b\delta}{k}$$

$$Y = \frac{\Sigma a^2 \Sigma b\delta - \Sigma ab \Sigma a\delta}{k}.$$

§. 20. Kennt man aber diese wahrscheinlichsten Werthe X und Y der beyden Größen x und y, so findet man die Gewichte P_x und Q_y dieser Bestimmungen der Resultate von X und Y, so wie die wahrscheinlichsten Fehler F_x und F_y dieser beyden Größen durch folgende, den bereits vorhin gegebenen analoge Ausdrücke

$$P_x = \frac{N}{2} \cdot \frac{k}{\Sigma b^2 \Sigma \varepsilon^2},$$

$$P_y = \frac{N}{2} \cdot \frac{k}{\Sigma a^2 \Sigma \varepsilon^2},$$

wo $\varepsilon = aX + bY - \delta$, $\varepsilon_1 = a_1 X + b_1 Y - \delta_1 \ldots$ ist, oder wo ε den Werth von $ax + by\delta$ bezeichnet, wenn man in dem

en Ausdrucke für x und y ihre im §. 19. gefundenen wahrscheinlichsten Werthe X und Y setzt.

Die wahrscheinlichsten Fehler dieser Bestimmungen der Resultate von X und Y sind

$$\text{für } X \ldots F_x = \frac{0.47694}{\sqrt{Px}},$$

$$\text{für } Y \ldots F_y = \frac{0.47694}{\sqrt{Py}},$$

d eben so sind die mittleren zu befürchtenden Fehler

$$\text{für } X \ldots \Phi_x = \frac{0.28209}{\sqrt{Px}},$$

$$\text{für } Y \ldots \Phi_y = \frac{0.28209}{\sqrt{Py}}.$$

§. 21. Noch ist übrig, die Genauigkeit oder die Präcision Gx und Gy dieses Resultates X und Y, und endlich die wahrscheinlichen Fehler f der einzelnen Beobachtung und die Gränzen dieser Fehler $f + \Delta f$ zu finden.

Zu diesem Zwecke wollen wir die beyden Gleichungen (I) und (II) so ausdrücken

$$\varepsilon = -\Sigma a\delta + x\Sigma a^2 + y\Sigma ab$$
$$v = -\Sigma b\delta + y\Sigma b^2 + x\Sigma ab.$$

eitet man aus ihnen durch die bekannte Methode der Elimination zwey andere Gleichungen ab, welche die Größen x und y durch ε und v ausdrücken, und welche die Form haben

$$\left.\begin{array}{l} x = L + A\varepsilon + Bv \\ y = L' + A'\varepsilon + B'v \end{array}\right\} \ldots \text{(III)},$$

sind $x = L$ und $y = L'$ die wahrscheinlichsten Werthe dieser Größen, oder es ist

$$X = L \text{ und } Y = L'$$

Übereinstimmung mit §. 19., weil dann $\varepsilon = v = 0$ gesetzt wird. Die Genauigkeit dieser Bestimmung von X und Y aber ist,

wenn man die Genauigkeit der einzelnen Beobachtungen Einheit annimmt,

$$\text{für } X \ldots G_x = \frac{1}{\sqrt{A}},$$

$$\text{für } Y \ldots G_y = \frac{1}{\sqrt{B}}.$$

Endlich ist, wie §. 9., der wahrscheinliche Fehler f jeder zelnen Beobachtung

$$f = F_x \,.\, G_x = F_y \,.\, G_y.$$

Um auch diese Ausdrücke auf ein Beyspiel anzuwenden, seye drey folgenden Bedingungsgleichungen gegeben

$$\varepsilon = x + y - 3$$
$$\varepsilon_1 = x - 2y + 4$$
$$\varepsilon_2 = 3x - y - 2,$$

so hat man

$$\Sigma a^2 = 11, \; \Sigma b^2 = 6, \; \Sigma ab = -4$$
$$\Sigma b\delta = 9, \; \Sigma a\delta = 5, \; k = 50,$$

und daher die wahrscheinlichsten Werthe der beyden Größen

$$X = \frac{33}{25} = 1.32000,$$

$$Y = \frac{119}{50} = 2.38000.$$

Mit diesen Werthen erhält man

$$\varepsilon = X + Y - 3 = 0.70,$$

und eben so

$$\varepsilon_1 = 0.56, \; \varepsilon_2 = -0.42,$$

also auch

$$\Sigma \varepsilon^2 = 0.9800,$$

und daher für die beyden gefundenen Bestimmungen von X und Y die Gewichte

$$P_x = \frac{3}{2} \cdot \frac{50}{5.88} = 12.7551,$$

$$P_y = \frac{3}{2} \cdot \frac{50}{10.78} = 6.95733.$$

Die wahrscheinlichsten Fehler

$$F_x = 0.133542$$
$$F_y = 0.180817.$$

ie mittleren zu befürchtenden Fehler

$$\Phi_x = 0.07898$$
$$\Phi_y = 0.10695.$$

eiter geben die beyden Gleichungen (I) und (II)

$$\varepsilon = 11\,x - 4\,y - 5$$
$$v = 6\,y - 4\,x - 9,$$

raus man durch Elimination erhält

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{33}{25} + \frac{3}{25}\,\varepsilon + \frac{2}{25}\,v \\ y &= \frac{119}{50} + \frac{4}{50}\,\varepsilon + \frac{11}{50}\,v \end{aligned}\right\}\ldots\text{III},$$

raus sofort die wahrscheinlichsten Werthe der Größen x und y lgen

$$X = \frac{33}{25}, \text{ und } Y = \frac{119}{50}$$

ie zuvor, und die Genauigkeit dieser beyden Resultate

$$G_x = \sqrt{\frac{25}{3}} = 2.88675$$
$$G_y = \sqrt{\frac{50}{11}} = 2.13201.$$

ndlich ist der Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = F_x\,G_x = F_y\,G_y = 0.38550.$$

Man sieht, daß in diesem Beyspiele die Größe X genauer timmt ist, als Y, und zwar in dem Verhältniß von

$$\frac{2.88675}{2.13201} = \frac{1.354}{1}.$$

Nach der Tafel des §. 6. findet man für diese Bestimmung Größe X folgende Gränzen

$$r = 1 \text{ gibt } \Delta\varphi = \frac{r}{\sqrt{P_x}} = \frac{1}{\sqrt{12.7551}} = 0.2800,$$

also kann man $\frac{w}{1-w} = 5.357$ gegen 1 wetten, daß [d]er Fehler von X nicht größer als 0.28 ist.

Für $r = 2.32767$ ist

$$\Delta\varphi = \frac{r}{\sqrt{P_x}} = \frac{2.32767}{\sqrt{12.7551}} = 0.672,$$

also kann man $\frac{w}{1-w} = 1000$ gegen 1 wetten, daß d[er Feh]ler von X nicht größer als 0.67 ist.

Für die Größe Y, die weniger genau bestimmt i[st, sind] für dieselben Wahrscheinlichkeiten diese Grenzen der Fehler [größer.] So ist für

$$r = 1 \ldots \Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{P_y}} = \frac{1}{\sqrt{6.9573}} = 0.379,$$

$$\frac{w}{1-w} = 5.357, \text{ und für}$$

$$r = 2.32767, \ \Delta\varphi = \frac{r}{\sqrt{P_y}} = 0.8825, \text{ und}$$

$$\frac{w}{1-w} = 1000,$$

oder man kann 1000 gegen 1 wetten, daß der Fehle[r] kleiner als 0.8825 ist, während dasselbe Verhältniß bey [X] für den kleinen Fehler 0.672 Statt hat.

§. 21. Man kann aber auch die Einführung der ξ und v, oder die Entwickelung der Gleichungen (III) g[anz um]gehen, und die Auflösung auf folgende einfache Ausdrücke führen. Ist

$$k = \Sigma a^2 . \Sigma b^2 - (\Sigma ab)^2$$

so sind die wahrscheinlichsten Werthe von x und y, wie z[u]

$$X = \frac{\Sigma b^2 \Sigma a\delta - \Sigma a\delta \Sigma b\delta}{k},$$

$$Y = \frac{\Sigma a^2 \Sigma b\delta - \Sigma ab \Sigma a\delta}{k}.$$

d von diesen Resultaten sind die Gewichte

$$P_x = \frac{Nk}{2\Sigma b^2 \Sigma \varepsilon^2}, \quad P_y = \frac{Nk}{2\Sigma a^2 \Sigma \varepsilon^2},$$

wo $\varepsilon = aX + bY - \delta$, $\varepsilon_1 = a_1 X + b_1 Y - \delta_1$ u. s. f. ist.
rner sind die mittleren zu befürchtenden Fehler dieser Resultate

$$\Phi_x = \frac{0.28209}{\sqrt{P_x}}, \quad \Phi_y = \frac{0.28209}{\sqrt{P_y}},$$

d die wahrscheinlichsten Fehler derselben

$$F_x = \frac{0.47694}{\sqrt{P_x}}, \quad F_y = \frac{0.47694}{\sqrt{P_y}}.$$

e Genauigkeit der Bestimmung dieser Resultate ist

$$G_x = \sqrt{\frac{k}{\Sigma b^2}}; \quad G_y = \sqrt{\frac{k}{\Sigma a^2}},$$

d endlich der Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{2\Sigma \varepsilon^2}{N}}.$$

unserem Beyspiele ist in derselben Ordnung

$$k = 50, \quad X = \frac{33}{25}, \quad Y = \frac{119}{50},$$

$$P_x = 12.75510 \qquad P_y = 6.95733$$
$$\Phi_x = 0.07898 \qquad \Phi_y = 0.10695$$
$$F_x = 0.13354 \qquad F_y = 0.18082$$
$$G_x = 2.88675 \qquad G_y = 2.13201$$
$$f = 0.38550.$$

I. Zwischen den Größen F und G hat man überhaupt fol-
nde Ausdrücke

$$G_x = \sqrt{\frac{k}{\Sigma b^2}} = \sqrt{\frac{2P_x \cdot \Sigma \varepsilon^2}{N}},$$

$$G_y = \sqrt{\frac{k}{\Sigma a^2}} = \sqrt{\frac{2P_y \cdot \Sigma \varepsilon^2}{N}},$$

$$F_x = \frac{f}{G_x} = 0.47694 \sqrt{\frac{2\Sigma \varepsilon^2 \Sigma b^2}{Nk}},$$

$$F_y = \frac{f}{G_y} = 0.47694 \sqrt{\frac{2\Sigma \varepsilon^2 \Sigma a^2}{Nk}}.$$

II. Sind die einzelnen Beobachtungen von ungleicher Güte, und ist z. B. $c\ c_1\ c_2 \ldots$, der Werth der ersten, zweyten und dritten Beobachtung, so wird man, wie im §. 16., die gegebenen Bedingungsgleichungen, außer dem s, durch die Größen $c\ c_1\ c_2 \ldots$ multipliciren, und dann mit ihnen, wie zuvor, verfahren.

Viertes Capitel.

22. Nehmen wir nun an, daß man durch eine Reihe von [Be]obachtungen drey unbekannte Größen x y z so bestimmen soll, [daß] sie diesen Beobachtungen am besten entsprechen. Hier werden die Bedingungsgleichungen folgende Form haben:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= a\,x + b\,y + c\,z - \delta \\
\varepsilon_1 &= a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z - \delta_1 \\
\varepsilon_2 &= a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z - \delta_2 \\
\varepsilon_3 &= a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z - \delta_3 \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

Sucht man daraus wieder diejenigen Gleichungen, welche [die] Summe der Quadrate der Fehler, oder welche die Größe

$$\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots = \Sigma\,\varepsilon^2$$

[zu] einem Minimum machen, oder welche den Ausdrücken

$$\left(\frac{d.\Sigma\varepsilon}{dx}\right) = 0, \left(\frac{d.\Sigma\varepsilon}{dy}\right) = 0, \left(\frac{d.\Sigma\varepsilon}{dz}\right) = 0$$

[ent]sprechen, so hat man

$$\left.\begin{aligned}
0 &= X\Sigma a^2 + Y\Sigma ab + Z\Sigma ac - \Sigma a\delta \\
0 &= X\Sigma ab + Y\Sigma b^2 + Z\Sigma bc - \Sigma b\delta \\
0 &= X\Sigma ac + Y\Sigma bc + Z\Sigma c^2 - \Sigma c\delta
\end{aligned}\right\}\ldots(I),$$

[und] die Werthe von X, Y und Z, welche man aus diesen drey [Gle]ichungen (I) durch Elimination findet, werden die gesuchten [wah]rscheinlichsten Werthe von x y z seyn.

Setzt man dann

$$k = \Sigma a^2 . \Sigma b^2 . \Sigma c^2 - \Sigma a^2 . (\Sigma b c)^2 - \Sigma b 2 (b^2) . (\Sigma a c)^2$$
$$- \Sigma c^2 . (\Sigma a b)^2 + 2 \Sigma a b . \Sigma a c . \Sigma b c,$$

so sind die Gewichte dieser drey Bestimmungen von

$$X \ldots P_x = \frac{N}{2 \Sigma \varepsilon^2} \cdot \frac{k}{\Sigma b^2 . \Sigma c^2 - (\Sigma b c)^2},$$

$$Y \ldots P_y = \frac{N}{2 \Sigma \varepsilon^2} \cdot \frac{k}{\Sigma a^2 . \Sigma c^2 - (\Sigma a c)^2},$$

$$Z \ldots P_z = \frac{N}{2 \Sigma \varepsilon^2} \cdot \frac{k}{\Sigma a^2 . \Sigma b^2 - (\Sigma a b)^2}.$$

Ist so P bekannt, so hat man für die mittleren zu befürchtenden Fehler

$$\Phi_x = \frac{0.28209}{\sqrt{P_x}}, \quad \Phi_y = \frac{0.28209}{\sqrt{P_y}}, \quad \Phi_z = \frac{0.28209}{\sqrt{P_z}}$$

für die wahrscheinlichsten Fehler

$$F_x = \frac{0.47694}{\sqrt{P_x}}, \quad F_y = \frac{0.47694}{\sqrt{P_y}}, \quad F_z = \frac{0.47694}{\sqrt{P_z}}$$

für die Genauigkeit dieser drey Resultate X, Y und Z ist

$$G_x = \sqrt{\frac{2 P_x . \Sigma \varepsilon^2}{N}}, \quad G_y = \sqrt{\frac{2 P_y . \Sigma \varepsilon^2}{N}},$$

$$G_z = \sqrt{\frac{2 P_z . \Sigma \varepsilon^2}{N}},$$

und endlich ist der wahrscheinlichste Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{2 \Sigma \varepsilon^2}{N}}.$$

Sind die einzelnen Beobachtungen von ungleichem Werth $c \; c_1 \; c_2 \ldots$, so multiplicirt man sie durch diese Werthe, und verfährt dann wie zuvor.

Exempel. Seyen die Gleichungen gegeben

$\varepsilon = x + y - 2z - 1 \ldots$ mit dem Werthe $c = 1$

$\varepsilon_1 = \frac{1}{3}x - y + \frac{1}{3}z - 1 \ldots$ „ „ „ $c_1 = 3$

$\varepsilon_2 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{2}z - \frac{1}{3} \ldots$ „ „ „ $c_2 = 6$

$\varepsilon_3 = \frac{1}{12}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{12}z - \frac{1}{4} \ldots$ „ „ „ $c_3 = 12$

ultiplicirt man diese Gleichungen nach der Ordnung durch c_1, c_2 und c_3, so erhält man die reducirten Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon = x + y - 2z - 1 \\ \varepsilon_1 = x - 3y + z - 3 \\ \varepsilon_2 = 2x + y - 3z - 2 \\ \varepsilon_3 = x - 4y + z - 3 \end{array}\right\}\ldots\ldots(A).$$

ese Gleichungen geben

$$\begin{array}{lll} \Sigma a^2 = 7 & \Sigma ab = - 4 & \Sigma a\delta = + 11 \\ \Sigma b^2 = 27 & \Sigma ac = - 6 & \Sigma b\delta = - 18 \\ \Sigma c^2 = 15 & \Sigma bc = - 12 & \Sigma c\delta = - 2 \end{array}$$

d daher sind die Gleichungen (I)

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 7X - 4Y - 6Z - 11 \\ 0 = 4X - 27Y + 12Z - 18 \\ 0 = 6X + 12Y - 15Z - 2 \end{array}\right\}$$

oraus man durch Elimination die wahrscheinlichsten Werthe Y Z der Größen x y z erhält

$$X = + 1.9231, \quad Y = - 0.1538, \quad Z = + 0.5128.$$

ubstituirt man diese Werthe von X Y Z in den Gleichungen (A), erhält man

$$\varepsilon = - 0.2563, \quad \varepsilon_1 = - 0.1027,$$
$$\varepsilon_2 = + 0.1540, \quad \varepsilon_3 = + 0.0511.$$

so ist $\Sigma\varepsilon^2 = 0.1025$ und $k = 39$, so wie $N = 4$. Damit erhält man die Gewichte

$$P_x = 2.9136, \quad P_y = 11.0211, \quad P_z = 4.3957.$$

ie mittleren zu befürchtenden Fehler

$$\Phi_x = 0.1652, \quad \Phi_y = 0.0850, \quad \Phi_z = 0.1345.$$

ie wahrscheinlichsten Fehler dieser drey Resultate

$$F_x = 0.2794, \quad F_y = 0.1437, \quad F_z = 0.2275,$$

d die Genauigkeit dieser Resultate

$$G_x = 0.3865, \quad G_y = 0.7518, \quad G_z = 0.4748.$$

Endlich ist der wahrscheinlichste Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{2 \Sigma \varepsilon^2}{N}} = 0.1080,$$

und daher der wahrscheinlichste Fehler der

1. Beobachtung $\frac{f}{c} = 0.108,$

2. „ $\frac{f}{c_1} = 0.036,$

3. „ $\frac{f}{c_2} = 0.018,$

4. „ $\frac{f}{c_3} = 0.009.$

Man sieht aus diesen Ausdrücken, daß von den drey Größen der Werth von Y am genauesten, und der von X am wenigsten genau, und daß Y nahe noch einmal so genau, als X bestimmt ist. Auch kann man, nach §. 6., 1000 gegen 1 wetten, daß der Fehler von

X nicht größer als ± 1.36
Y „ „ „ ± 0.70
Z „ „ „ ± 1.11 ist.

sonders in England, mit so glücklichem Fortgange bestehen, und von welchen die meisten bey uns noch unbekannt sind. Die erste Abtheilung desselben verbreitet sich über die wesentlichsten Theile dieses Gegenstandes in einem populären, Jedermann verständlichen Vortrage; die zweyte beschäftigt sich mit der eigentlichen Basis, oder mit der Berechnung desselben. Dem Ganzen sind viele Tafeln beygefügt, welche auch ohne Kenntniß jener Berechnung, bey der Errichtung und Prüfung solcher Anstalten leicht, und mit Nutzen gebraucht werden können.

Kalender für alle Stände.

1833.

Preis: geheftet 24 kr.; geheftet und durchschossen 28 kr.; cartonnirt 32 kr. C. M.

Dieser bisher so allgemein gut aufgenommene Kalender hat sich für dieses Jahr durch wesentliche und sehr zweckmäßige Änderungen sowohl, als auch durch interessante Zusätze, mit denen er durch den regen Geist des bekannten Herrn Herausgebers ausgeschmückt wurde, eines erneuerten Beyfalles versichert. Unter jenen wollen wir hier nur anführen, daß jetzt jedem Monathe fünf Seiten, statt den früheren vier, gewidmet sind, die ersten zwey Seiten jedes Monaths nämlich haben ganz die Gestalt, die sie in dem letzten Jahrgange hatten, beybehalten, die dritte Seite hingegen gibt jetzt bloß die Ephemeriden der Sonne und des Mondes, während sie früher auch die der Planeten enthielt, in einem etwas ausgedehnteren Umfange, indem von der Sonne nebst Auf- und Untergang, auch Länge und Abweichung, und vom Monde die Zeit seiner Culmination, und seine Abweichung angegeben sind; die vierte Seite jedes Monaths aber enthält lediglich die Ephemeriden der Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn und Uranus, und zwar findet man von jedem derselben die Tageszeit seiner Sichtbarkeit, seine Länge, Abweichung, Zeit der Culmination, des Auf- und Unterganges angezeigt; die fünfte und letzte Seite jedes Monaths endlich ist wie früher dem Tagebuche der Erscheinungen gewidmet.

Unter den neuen Zusätzen ist vorzüglich eine Chronik der epidemischen Krankheiten vom Jahre 1700 vor Christo bis auf unsere Zeit würdig, der allgemeinen Aufmerksamkeit empfohlen zu werden, da sie bey den leider damit nur zu verwandten gegenwärtigen Zeitverhältnissen, durch das Erinnern an so viel gräßlichere Plagen des Menschengeschlechts zu einer wahren Quelle des Trostes und der Beruhigung wird. Endlich erwähnen wir hier noch ein sehr fleißig gearbeitetes Verzeichniß aller durch meteorologische Erscheinungen ausgezeichneten Jahre von 476 vor Christo bis 999 nach Christo, dessen für das nächste Jahr versprochene Fortsetzung wir mit Ungeduld erwarten, und einen gewiß recht vielen lebenslustigen Wienern willkommenen Anzeiger aller Wienergesellschaftswagen sammt der Stunde ihrer Ankunft und Abfahrt.

Anleitung zur Berechnung

der

Lebensrenten

und

Wittwenpensionen

ohne Hülfe der Algebra.

Von

J. J. Littrow,

Director der Sternwarte und Professor der Astronomie an der k. k. Universität in Wien, Ritter des kais. russischen St. Anna Ordens der zweyten Classe, Mitglied der kais. russischen Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg, der königl. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, der großbrit. astronomischen Gesellschaft in London, der k. k. Landwirthschafts-Gesellschaft in Wien, der Akademie der Wissenschaften in Krakau, Ehrenmitglied der kais. Universität in Kasan, Palermo ꝛc.

Wien, 1829.

Im Verlage von J. G. Heubner.

1. Annuities – Tables

E.D.

S.Y.T.D.

Vorrede.

bschon in den letzten Decennien bey uns mehrere neue
twenanstalten entstanden sind, so scheinen doch die
ren Grundsätze, nach welchen allein Gesellschaften
r Art errichtet werden sollen, und auch im Auslande
er That schon längst errichtet worden sind, unter uns
keinesweges vollkommen bekannt zu seyn. Wie
e es sonst möglich, daß man jenen, unter den Ken-
dieses Gegenstandes schon seit mehr als einem Jahr-
dert allgemein angenommenen Principien, ganz an-
, und zwar solche untergeschoben hat, die den wohl-
tigen Zweck, welchen man dadurch zu erreichen sucht,
r zu hindern, als zu befördern geeignet scheinen.
nn man z. B. bey der Bestimmung der Einlagen oder
Pensionen nur das Alter des eintretenden Mannes,
r nicht das eben so wichtige Alter seiner Frau be-
sichtiget; wenn man die Pension, nach dem Tode
ersten Frau eines Mitgliedes, auch noch auf die
yte und dritte Frau desselben Mannes übergehen

1. Annuities – Tables.

E.D.

S&T.D.

Vorrede.

Obschon in den letzten Decennien bey uns mehrere neue Wittwenanstalten entstanden sind, so scheinen doch die wahren Grundsätze, nach welchen allein Gesellschaften dieser Art errichtet werden sollen, und auch im Auslande in der That schon längst errichtet worden sind, unter uns noch keinesweges vollkommen bekannt zu seyn. Wie wäre es sonst möglich, daß man jenen, unter den Kennern dieses Gegenstandes schon seit mehr als einem Jahrhundert allgemein angenommenen Principien, ganz andere, und zwar solche untergeschoben hat, die den wohlthätigen Zweck, welchen man dadurch zu erreichen sucht, mehr zu hindern, als zu befördern geeignet scheinen. Wenn man z. B. bey der Bestimmung der Einlagen oder der Pensionen nur das Alter des eintretenden Mannes, aber nicht das eben so wichtige Alter seiner Frau berücksichtiget; wenn man die Pension, nach dem Tode der ersten Frau eines Mitgliedes, auch noch auf die zweyte und dritte Frau desselben Mannes übergehen

*

läßt; wenn man sie sogar, auch nach dem Tode der letzten aller dieser Frauen, noch auf die Kinder der Familie überträgt, und so ganz heterogene Gegenstände, wie Wittwen- und Waisenanstalten, als gleichartig behandelt und unter einander mischt u. s. w., so zeugt dieß von einem Mangel an Sachkenntniß, der nur sehr nachtheilige und diese Sache selbst am Ende ganz zerstörende Folgen haben kann. Bey solchen Einrichtungen kann an eine richtige Berechnung der Pensionen, an diese erste und unerläßliche Bedingung aller guten Wittwenanstalten, nicht weiter gedacht werden. Denn was wollte man da noch rechnen, wo nur Zufälle, für uns wenigstens ganz gesetzlose Zufälle vorliegen, über deren Zusammenhang und Aufeinanderfolge uns weder Vernunft, noch Erfahrung zu belehren im Stande sind? — Daher wurden, wo immer so ganz verkehrte Einrichtungen Beyfall fanden, an die Stelle der, unter jenen Voraussetzungen offenbar unmöglichen Rechnungen, sogenannte Ueberschläge, beyläufige Meinungen, Ansichten, Einfälle, und wie diese Surrogate der Rechnung alle heißen, substituirt, und die sehr traurigen Resultate, die man auf diesen Abwegen erhalten hat, sind bereits zu bekannt, als daß ich sie hier näher bezeichnen sollte. Wie viel besser würden diese sogenannten Gründer jener Institute gethan haben, statt sich ihren Neuerungen und ihren bisher unerhörten Experimenten mit fremden Gelde zu überlassen, auf dem alten, bekannten und bewährten Wege zu bleiben, und die ruhmwürdigen Beyspiele ihrer Vorgänger nachzuah-

men, von welchen z. B. die Hamburger Versorgungsanstalt schon 50, die equitable society über 60, die amicable society in London bereits über 100 Jahre besteht, und sich noch immer eines blühenden Wohlstandes erfreut, während unsere, auf jene neuen Principien gebauten Institute schon von ihrer Geburt aus kränkeln und ihr sieches Leben kaum einige Jahre über die Epoche ihrer Entstehung mühsam fortzuschleppen im Stande sind.

Ohne Zweifel wurden die meisten Urheber dieser neuen Institute durch die Gefühle der Humanität und des Mitleidens mit einem in der That sehr unglücklichen Theile der menschlichen Gesellschaft zu diesen, wie sie es nennen, neuen und großen Verbesserungen der alten Methode verleitet. Sie wünschten, ihre schützende Vorsorge nicht nur über die gegenwärtigen, sondern auch über alle noch künftigen Frauen ihrer Mitglieder, über ihre Kinder und Kindeskinder, und am Ende noch über alle ihre Verwandten bis ins zwanzigste Glied, wohlthätig und mildreich auszubreiten. — Allein diese Gesinnungen, so edel und lobenswürdig sie an sich seyn mögen, sind doch nicht hinreichend, darauf die Einrichtung eines Wittweninstituts zu erbauen. Der Gründer d. h. der Berechner einer solchen Anstalt soll nicht von den dunklen Gefühlen des Mitleidens für einen Theil der Gesellschaft auf Kosten der übrigen, sondern er muß von den deutlichen Ansichten der Gerechtigkeit, einer für die ganze Gesellschaft gleichmäßigen Gerechtigkeit, und vor allem von der innigen Kenntniß des Gegenstandes geleitet

werden, damit nicht, was er dem einen mildthätig gibt, dem anderen grausam entzogen werde, und damit nicht, während er in gutmüthiger Thorheit ausgeht, Thränen zu trocknen, er vielleicht nur neue und noch schmerzlichere erzeuge.

Dieß zu verhindern, und jene so nothwendige Kenntniß unter uns mehr und mehr zu verbreiten, ist der Zweck dieser Schrift. Zwar besitzen wir bereits eine nicht geringe Anzahl vortrefflicher Werke über diesen Gegenstand: aber sie sind sämmtlich zu gelehrt, um dem größeren Theile der Leser zugänglich zu seyn. Sie sind in der Sprache der Mathematik geschrieben, die Niemand lernen will, und sie starren von algebraischen Formeln, welche die meisten Leser zurückschrecken. Aus dieser Ursache sind sie und ihr Inhalt, unter uns, größtentheils unbekannt geblieben. Sie gehören noch immer, wenn ich so sagen darf, nur der Schule an, und sind noch nicht ins Leben übergetreten, obschon der Gegenstand, den sie behandeln, einen so großen und unmittelbaren Einfluß auf Wohl und Weh im Leben selbst hat.

Diesem Uebelstande zu begegnen, habe ich es versucht, jene Kenntnisse herabzuziehen von der Höhe, auf die man sie bisher gestellt hat; sie von dem fremden Gewande der Schule zu entkleiden, und sie, nach dem Beyspiele eines nahe vor fünfzig Jahren schon von Karsten u. a. angestellten ähnlichen Versuches, in einer gemeinfaßlichen Sprache jedem verständlich zu machen, der nur eben mit den ersten Operationen der gemeinsten Rechenkunst

bekannt ist *). Ich hoffe, dadurch den bisher für unüberwindlich gehaltenen Glauben zu zerstören, daß dieser Gegenstand sich ohne verwickelte algebraische Formeln nicht vortragen lasse, und daß überhaupt die hiehergehörenden Rechnungen, wegen ihren Schwierigkeiten, nur gleichsam das Eigenthum einiger weniger Auserwählten seyn können. Man wird sich bald durch eigene Ansicht überzeugen, daß jene gelehrten Gerüste keinesweges unentbehrlich sind, und daß auch der einfachste Rechner, ohne ihre Hülfe, alle jene Bestimmungen, und zwar nicht annähernd, sondern ganz genau und streng durchzuführen, und zugleich auch ihre Gründe einzusehen im Stande seyn wird. Doch muß ich zugleich dankbar bekennen, daß der Werth und die Anwendbarkeit dieser kleinen Schrift ganz vorzüglich durch die beyden letzten Tafeln V und VI erhöht wird, die mein berühmter und hochverehrter Freund, Herr Re-

---

*) Ich setze nur voraus, daß der Leser die sogenannten vier Species in ganzen Zahlen und in Decimalbrüchen kennt, Dinge, die in jeder Dorfschule gelehrt werden — sollen. Der Kürze wegen wurden noch einige der gewöhnlichsten Zeichen gebraucht, die ich hier, der leichteren Uebersicht wegen, zusammen stelle.

$=$ ist das Zeichen der Gleichheit
$+$ — — — Addition
$-$ — — — Subtraction und
$.$ — — — Multiplication.

So ist $4+3=7$ und $7-3=4$ und $3.7=21$
also auch $(4+3).(7-3)$ oder $7.4=28$.

Für die Division endlich hat man

$$\frac{10}{5}=2,\quad \frac{17+23}{8}=\frac{40}{8}=5 \text{ und}$$

$$\frac{(8+16).(30-12)}{5+4}=\frac{24.18}{9}=\frac{432}{9}=48 \text{ u. s. w.}$$

gierungsrath von Weber, mit besonderer Sorgfalt und seltenem Eifer berechnet, und mir zur Bekanntmachung gefälligst mitgetheilt hat. An ihm besitzt die Monarchie einen Mann, der, wie kein anderer, mit allen Theilen dieses wichtigen Gegenstandes innig vertraut ist; der darüber die reichsten und schätzbarsten Erfahrungen gesammelt hat, und durch dessen Beyrath und Hülfe, wenn sie erkannt und gewürdiget worden wäre, unsere Institute einer blühenden Gesundheit und der heitersten Aussicht für die Zukunft sich erfreut haben würden.

Um übrigens auch denjenigen nicht zu entstehen, welchen es mehr um die Kenntniß der Sache, als ihrer Gründe zu thun ist, und welchen daher, auch diese kleine Schrift mit Aufmerksamkeit zu lesen, Zeit oder Lust gebrechen möchte, habe ich in einem Anhange am Ende des Buches das Vorzüglichste von dem zusammengestellt, was zur Errichtung neuer Institute sowohl, als auch zur Prüfung der schon bestehenden Anstalten dieser Art, zu wissen nothwendig ist. Manche von denen, welche sich mit diesem Anhange begnügen wollen, werden vielleicht in der Lage seyn, als Gründer, oder doch als Beförderer und Beschützer solcher Anstalten wirken zu können, und den anderen wird es, wie ich glaube, angenehm und nützlich zugleich seyn, sich in der Zeit von einigen Minuten ein Mittel zu verschaffen, den inneren Werth einer Anstalt selbst zu prüfen, und sich und anderen dadurch vielleicht großen Verlust zu ersparen.

Um endlich auch diejenige Classe von Lesern nicht

unbefriediget zu lassen, die, mit der mathematischen Sprache vertraut, den Gegenstand in der ihm eigenthümlichen wissenschaftlichen Form dargestellt wünschen, habe ich in den Noten zum Schlusse der Schrift die algebraischen Ausdrücke mitgetheilt, nach welchen diese Berechnungen gemacht werden. Diese Noten stehen im fortlaufenden Zusammenhange mit den in dem Werke selbst entwickelten Vorschriften, obgleich das letzte von jenen unabhängig und auch ohne diese Noten vollkommen verständlich ist. — Endlich habe ich mich bemüht, alles durch zahlreiche Beyspiele zu erläutern, da diese zu meinem Zwecke, einer gemeinfaßlichen Darstellung des hier behandelten Gegenstandes, vorzüglich beytragen.

Ich bin zwar nicht der Meinung vieler anderer, daß aus der öffentlichen Prüfung schon bestehender Privatanstalten dieser Art, für diese Anstalten selbst irgend ein Nachtheil erwachsen könnte. Vielmehr bin ich innig überzeugt, daß eine solche Prüfung für die Anstalt sowohl, als für die Mitglieder derselben nicht anders, als nützlich und vortheilhaft seyn kann. Gute und zweckmäßig eingerichtete Wittweninstitute sind eine so wichtige, und für die ganze menschliche Gesellschaft so wohlthätige und wünschenswerthe Sache, daß jeder, der es vermag, zu ihrer Beförderung nach allen seinen Kräften beytragen soll, und dieß kann gewiß nicht besser, als durch offene und redliche Mittheilung geschehen. — Indessen wird die gute Sache nicht immer am besten durch polemische Schriften, oder die zu ihnen führen, befördert,

und die Wahrheit ist oft stark genug, sich allein Bahn zu brechen. Ich habe es daher vorgezogen, keines der bereits bestehenden Institute zu nennen und sie dadurch gleichsam einer speciellen Untersuchung zu unterwerfen. Es ist genug, gezeigt zu haben, welche Vorzüge diese Institute überhaupt haben, und welche Fehler sie nicht haben, und wie endlich die Rechnungen derselben geführt werden sollen, um auf eine gesicherte Dauer der Anstalt für die Zukunft Anspruch machen zu können. Ich werde zufrieden seyn, wenn diese Schrift die in ihr enthaltenen und unter uns, wie es scheint, noch wenig bekannten Wahrheiten weiter verbreiten, und den Lesern Mittel an die Hand geben wird, jene Gegenstände selbst zu prüfen und dadurch sich und andere vor Schaden zu bewahren.

Wien den 20. October 1828.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erstes Capitel.

Sterblichkeits-Tabellen.

Der Gegenstand dieses Werkchens, die Berechnung der Leib- und Wittwenrenten, ist, wenigstens im Auslande, schon längst bekannt und auf bestimmte Grundsätze zurückgeführt, an welchen, da sie selbst auf einer streng mathematischen Basis beruhen, keine wesentlichen Aenderungen mehr vorgenommen werden können. Schon der große Christian Huyghens (geb. 1629), der sich durch so viele Erfindungen in der Astronomie und Mechanik einen immer dauernden Ruhm erworben hat, lehrte uns die Probabilitäten berechnen, und der nicht minder berühmte Edmund Halley (geb. 1656) wandte der erste diese Probabilitätsrechnung auf die von ihm selbst in Ordnung gebrachten Sterblichkeits-Tabellen an, und wurde dadurch der Gründer der Berechnung der Leib- und Wittwenrenten. Seine Nachfolger, Moivre und Simpson, bildeten diese Theorie noch weiter aus, und der letztere besonders muß als einer der classischen Schriftsteller über diesen Gegenstand betrachtet werden *), so wie Price, dessen treffliche **Observations on reversionary payments** schon in der vierten

---

*) Simpson's Werke sind:
Doctrine of Annuities and Reversions, London 1742 und Select exercises for the youg proficients in the mathematicks. Lond. 1752.

Moivre aber schrieb: The doctrine of chances. Lond. 1738 et 1758 und The annuities on lives. Lond. 1743.

Auflage, London 1783, erschienen sind. Wir verdanken daher die erste Ausbildung dieser Wissenschaft den Engländern, die bey ihnen schon einen hohen Grad von Vollkommenheit erreicht hatte, als man, um die Mitte des verflossenen Jahrhunderts, in Deutschland noch kaum die ersten Elemente derselben zu kennen schien. Unser unsterbliche Leonhard Euler (geb. 1707, gest. 1783) brach auch hier, wie in so vielen anderen Theilen der Mathematik, die Bahn *), und seitdem zählen wir mehrere ausgezeichnete Schriftsteller über diesen Gegenstand, von welchen ich hier nur die vorzüglichsten anführe.

Kritter, Gutachten über den Zustand der Bremischen Wittwengesellschaft 1767; und, ökonomisch politische Auflösung der Fragen über Wittwenkassen. Götting. 1768. Sammlung von drey Aufsätzen über Wittwenanstalten. Hamb. 1777 u. f.

Lambert, Beyträge zur Mathematik. Dritter Theil.

Guden, von den Wittwencassen. Hannover 1771.

Florencourt, Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst. Altenburg 1781.

Tetens, Anleitung zur Berechnung der Leibrenten. Leipzig 1785. II. Vol.

Meyer, allgemeine Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften. Kopenhagen 1823. II. Vol.

Diese, und vorzüglich die drey letzten der erwähnten Werke werden dem Leser, der weiter zu gehen, und diese interessante und wichtige Wissenschaft näher zu kennen wünscht, als sichere Führer dienen, besonders wenn er sich mit den nun folgenden gemeinfaßlichen Betrachtungen bereits bekannt gemacht, und sich wenigstens die ersten Kenntnisse der Algebra erworben hat, die in jenen Werken vorausgesetzt werden.

---

*) Euler, sur les rentes viageres, in den Mem. de Berlin 1760 und Eclaircissem. et calcul sur les caisses des Veuves. Petersburg und im neuen Hamb. Magazin. Band VIII.

Wenn man eine Wittwenanstalt berechnen will, so muß man vor Allem wissen, welchen Zweck man durch diese Anstalt erreichen soll. Dieser Zweck ist allerdings die Versorgung der Wittwen, wie allgemein bekannt.

Allein welche Versorgung? — das ist die Frage, damit durch sie das Institut auch für die ferne Zukunft sicher bestehen, damit kein Glied desselben auf Kosten des anderen bevortheilt werden, und damit jede Wittwe so viel, und nur so viel erhalten soll, als sie durch die Beyträge ihres Mannes zu fordern in der That berechtiget ist.

Es scheint zwar, als ob sich diese Frage von selbst verstünde, und daher eine nähere Untersuchung derselben überflüssig wäre. Allein es würde nicht schwer seyn, mehrere Anstalten dieser Art, selbst im Auslande, anzuführen, bey deren Gründung man diese wichtige Frage entweder gar nicht aufgeworfen, oder, was für die daraus entspringenden Folgen dasselbe ist, sie entweder nicht vollständig oder sogar unrichtig beantwortet hat. Es gibt Leute, die da glauben, daß jede strenge Berechnung einer solchen Anstalt, welche die Dauer derselben auf eine lange Folgezeit sicherte, zu den bloßen frommen Wünschen, zu den unmöglichen Dingen gehöre, und daß man daher mit Ueberschlägen und beyläufigen Näherungen aufs Gerathewohl sich begnügen könne und selbst müsse, weil doch ein höherer Grad von Genauigkeit unerreichbar ist. Wer sich dann mit solchem Glauben an die Spitze der Gesellschaft stellt, und sich wohl noch zum Gründer derselben aufwirft, pflegt gewöhnlich, wenn er sonst an Vorsicht gewöhnt ist, dafür zu sorgen, daß alle fünf oder zehn Jahre eine Revision des Instituts, und wenn es unhaltbar gefunden wird, eine sogenannte Verbesserung desselben vorgenommen wird, wo gewöhnlich wieder neue und eben so unhaltbare Provisorien auf die Bühne treten, bis endlich, aller immer wiederholten Verbesserungen ungeachtet, die Verwirrung immer größer, das Uebel

gänzlich unheilbar, und der Ruin des Institutes unvermeidlich wird. — Andere, und auch davon ließen sich Beyspiele anführen, suchen den Zweck und dadurch alles Heil des Institutes bloß in der Menge der Mitglieder desselben, in der gewissen Hoffnung, daß es sich erhalten muß, wenn man es nur dahin gebracht hat, daß mit jedem neuen Jahre auch eine recht große Anzahl neuer Mitglieder eintrete. Diese Absicht zu erreichen, versprechen sie ganz unmäßige Pensionen für kleine Einlagen, und locken dadurch ohne Zweifel alle jene Menschen, und ihrer ist überall der größte Theil, an sich, welche nicht gern viel geben, und dafür desto lieber recht viel nehmen wollen. Aber diese Irregeführten, so wie jene, welche sie irreführen, bedenken beyde nicht, was ihres eigenen Vortheiles ist. Denn ist eine Anstalt dieser Art schlecht berechnet, und das ist sie immer, wenn die Einlagen zu klein oder die Pensionen zu groß sind, so ist jeder, der in dieselbe tritt, in seinen Hoffnungen betrogen, weil sie nicht erfüllt werden können, und weit entfernt, daß eine große Anzahl neuer Mitglieder dem Uebel steuern sollte, so wird ein solches Institut vielmehr nur desto mehr Unglückliche machen, je mehr es neue Mitglieder aufgenommen hat, und das allgemeine Elend durch dasselbe Mittel nur noch vergrößern, durch welches es dasselbe vermindern oder ganz entfernen wollte.

Welches soll also, um unserem Gegenstande näher zu kommen, der wahre Zweck seyn, für welchen ein Wittweninstitut errichtet wird? — Die Zahlungen der Mitglieder an das Institut und die Rückzahlungen der Pensionen des Instituts an die Mitglieder müssen gegenseitig so berechnet und abgewogen seyn, daß dadurch erstens; noch die letzte Wittwe des Instituts gehörig und so, wie alle vorhergehenden Wittwen, versorgt werden könne, und daß zweytens; bey dem Tode dieser letzten Wittwe das ganze Institutscapital erschöpft seyn muß.

Dieß ist der wahre Zweck einer Wittwenanstalt, ohne wel-

chen kein Gedeihen und selbst kein Bestehen derselben für die Zukunft gedacht werden kann. Dieser Zweck besteht also aus zwey Theilen, die beyde gleich wesentlich sind. Denn wenn erstens die späteren Wittwen weniger als die früheren oder vielleicht gar nichts mehr bekommen, so ist die Rechnung schlecht gewesen, weil kein Geld mehr in der Casse ist zu einer Zeit, wo noch eines darin seyn soll, oder weil die Pensionen zu groß angesetzt wurden. Und wenn zweytens bey dem Tode der letzten Wittwe, also bey dem Tode des ganzen Instituts, noch ein übriges Geld in der Casse ist, so ist die Rechnung ebenfalls schlecht gewesen, weil man doch nicht voraussetzen kann, daß die Casse eines Wittweninstituts, wie bey einer auf merkantilische Vortheile übernommenen Speculation, etwas für sich an den armen Wittwen gewinnen will, und weil daher, zum unerlaubten Vortheil des Instituts, die Pensionen zu klein angesetzt worden sind.

Vor diesen beyden Abwegen, vor den zu großen und vor den zu kleinen Pensionen, muß sich daher der Berechner einer solchen Anstalt mit gleicher Sorgfalt in Acht nehmen. Der einzige wahre und allerdings enge Weg liegt zwischen jenen zwey Irrwegen in der Mitte, und es ist des Rechners Sache, ihn seine ganze Reise durch unverrückt im Auge zu behalten.

Man kann im Allgemeinen auf drey verschiedene Arten in eine Wittwengesellschaft treten. Entweder zahlt der Mann gleich bey seinem Eintritte ein sogenanntes Antrittsgeld und nichts weiter; oder er entrichtet kein Antrittsgeld, aber dafür, so lange er lebt, einen jährlichen Beytrag, oder endlich, er erlegt gleich bey seinem Eintritte ein geringeres Antrittsgeld und überdieß noch, so lange er lebt, einen jährlichen Beytrag. Das erste heißt der Eintritt auf Capitalfuß, das zweyte auf Contributionsfuß, und das dritte der Eintritt auf gemischten Fuß.

Welche von diesen drey Arten des Eintritts man aber auch wählen mag, so ist für sich klar, daß bey ihnen allen das Verhält-

niß der Pension zu der Einlage abhängen wird: erstens von dem Alter des Mannes, der in die Gesellschaft tritt, und zweytens von dem Alter der Frau, mit welcher er in die Gesellschaft tritt. Denn tritt das Paar auf Capitalfuß ein, so wird ein älterer Mann mehr zahlen müssen, weil er wahrscheinlich früher sterben, also seine Frau die Pension früher erhalten und länger beziehen wird, als die eines jüngeren Mannes; und eben so wird bey demselben Alter des Mannes, für eine jüngere Frau mehr bezahlt werden müssen, weil diese wahrscheinlich länger leben und daher durch ihre Pension dem Institute länger zur Last fallen wird, als eine ältere Frau. Ganz dasselbe hat auch bey dem Contributionsfuße statt. Denn da die jährlichen Beyträge nur so lange entrichtet werden, als der Mann lebt, so wird der ältere Mann größere Beyträge zahlen, weil er sie wahrscheinlich nicht lange mehr zahlen wird, und eben so wird, bey demselben Alter des Mannes, für die jüngere Frau ein größerer Beytrag mit Recht gefordert werden, weil diese ihre Pension wahrscheinlich länger genießen und daher dem Institute beschwerlicher seyn wird, als eine ältere Frau. Und dasselbe endlich wird auch für den gemischten Fuß gelten, weil er aus jenen beyden zusammen gesetzt ist.

Man sieht daraus, daß bey jedem zweckmäßig eingerichteten Wittweninstitute die Kenntniß des Alters der beyden Theile jedes Ehepaares eine nothwendige und unerläßliche Sache ist, weil die Größe der Pension, oder wenn diese bestimmt ist, die Größe der Leistung dieses Paares eben sowohl von dem Alter des Mannes, als von jenem der Frau abhängig ist, und nicht durch eines derselben, sondern bloß durch beyde zugleich bestimmt werden kann. Sollte es daher Institute der Art geben, in welchen z. B. auf das Alter der Frau keine Rücksicht genommen, und die Pensionen oder die Zahlungen bloß nach dem Alter der eintretenden Männer bestimmt werden, ohne Unterschied, ob ihre Frauen jung

oder alt sind, so muß ein solches Institut, auch ohne weitere Prüfung durch Rechnung, sogleich als zweckwidrig und als sich selbst zerstörend angesehen werden, weil es ihm an den ersten Principien, an der Basis fehlt, ohne welche sich gar kein gehörig eingerichtetes Wittweninstitut denken läßt.

Wenn man also weiß, wie alt beyde Theile eines Ehepaars bey ihrem Eintritte in die Gesellschaft sind, und wenn man überdieß ein Mittel hat, zu erfahren wie lange jedes von ihnen noch leben wird, so kann es offenbar nicht mehr schwer seyn, zu bestimmen, wie viel der Mann entweder an Antrittsgeld oder an jährlichen Beyträgen entrichten muß, um nach seinem Tode seiner Wittwe eine bestimmte jährliche Pension z. B. von 100 Gulden zu versichern. Summirt man nämlich die Zahlungen, die der Mann entweder gleich bey seinem Eintritte, oder mit dem Anfange eines jeden neuen Jahres, so lange er lebt, an das Institut leistet, und schlägt man dazu die Zinseszinsen dieses Geldes, so erhält man die Summe, welche bey dem Tode dieses Mannes in der Institutscasse für seine Wittwe niedergelegt wurde, und da man, wie oben vorausgesetzt wurde, die Anzahl der Jahre ebenfalls kennt, welche die Wittwe nach dem Tode ihres Mannes noch zu leben hat, so wird man leicht finden, wie viel man ihr durch alle diese Jahre an jährlicher Pension geben kann, damit bey dem Tode der Wittwe jene von ihrem Gatten für sie deponirte Summe völlig erschöpft ist, wodurch dann der oben ausgesprochene Zweck des Instituts für dieses Paar vollkommen erfüllt ist.

Allein, so klar dieses alles an sich seyn mag, so ist doch in dem Vorhergehenden eine Bedingung mit aufgenommen worden, von der man wohl nicht leicht sehen wird, wie man ihr genügen soll. Man soll nämlich erstens das Alter des Mannes und der Frau bey ihren Eintritte in die Gesellschaft kennen, und das wird immer möglich seyn, da man beyde darum befragen und zur

größern Sicherheit auch noch ämtliche Belege, Taufscheine u. dgl. von ihnen fodern kann. Man soll aber auch zweytens noch wissen, wie lange der Mann sowohl, als die Frau noch leben wird, und diese Frage werden weder sie selbst, noch andere so leicht beantworten können. Und doch ist sie nicht minder wichtig, als die erste, ja im Grunde noch viel wichtiger, da ohne sie alle Berechnung eigentlich ganz unmöglich ist.

Wir sind nun zu dem Hauptpuncte unseres Gegenstandes, gekommen. Wie soll man nämlich, wenn auch nicht zu einer ganz verläßlichen, doch zu einer wahrscheinlichen, der Wahrheit wenigstens so nahe als möglich kommenden Antwort auf diese zweyte Frage, von der Lebensdauer der beyden Theile des eintretenden Paares, gelangen?

Es wird uns wohl immer unmöglich seyn, den Todestag oder auch nur das Todesjahr irgend eines bestimmten Menschen vorauszusagen. Nehmen wir aber an, daß an irgend einem Orte in einem Jahre, z. B. in dem Jahre 1800, zusammen 1000 Menschen geboren werden, und daß nach zehn Jahren von diesen 1000 Menschen nur mehr 532 leben, also bereits 468 gestorben sind. In dem folgenden zweyten Jahre 1801 wurden in derselben Stadt 980 geboren, von welchen nach zehn Jahren 460 starben. Hält man sich also bloß an die Erfahrung dieses zweyten Jahres, so findet man, daß, wenn in demselben auch 1000 geboren worden wären, davon nach 10 Jahren 469 gestorben seyn würden, weil

$$980 : 460 = 1000 : x \text{ wo } x = 469$$

Nehmen wir an, daß man diese Beobachtungen mehrerer Jahre fortgesetzt und gefunden habe

Jahr	Geborne	Nach 10 Jahren Gestorbene.	Also von 1000 Gebornen nach zehn Jahren Gestorbene.
1800	1000	468	468
1801	980	460	469
1802	1130	528	467
1803	950	445	468 u. s. f.

so bemerkt man schon nach wenig Jahren, daß in den letzten Zahlen dieser Tafel eine gewisse Gleichförmigkeit herrsche, oder daß im Allgemeinen von derselben Anzahl Menschen in derselben Zwischenzeit immer auch sehr nahe dieselbe Anzahl durch den Tod aus der Gesellschaft entfernt werde, und daß diese Ordnung in allen Klassen und in allen Lebensaltern der Menschen statt habe, wenn anders nicht verheerende Krankheiten, unglückliche Kriege, oder andere Störungen jener natürlichen Ordnung eintreten. Welches aber immer die Ursache jener auffallenden Erscheinung seyn mag, durch welche die Natur, wie es scheint, die Stabilität der Erhaltung unseres Geschlechtes erreicht — uns ist es genug, zu wissen, daß diese bewunderungswürdige Ordnung in der That besteht, und durch alle Beobachtungen zu allen Zeiten und an allen Orten auf der Oberfläche unserer Erde vollkommen bestätiget ist.

Wenn aber eine Erscheinung durch Hunderte von Jahren und auf Hunderte von verschiedenen Städten und Ländern angewendet, sich immer und ohne Ausnahme wiederholt, so fühlen wir uns, selbst wenn wir keinen Grund dieser Wiederholung angeben können, berechtigt und gleichsam gezwungen, sie auch für die folgenden Jahre und für die übrigen Städte, kurz, sie allgemein für alle Orte und alle Zeiten gelten zu lassen, indem wir sagen, daß solche Erscheinungen, eben wegen ihrer regelmäßigen und schon so oft beobachteten Wiederkehr, von einem, uns übrigens unbekannten, Naturgesetze abhängen, welches durch dieselbe Ursache immer auch wieder dieselbe Wirkung hervorbringt. Der größte Theil aller unserer Vernunftschlüsse, und beynahe aller unserer sogenannten moralischen und politischen Wahrheiten ist dieser Art, und keineswegs unmittelbar, wie etwa in der Mathematik, sondern bloß durch Beobachtungen und Erfahrungen, durch Combinationen der aufeinander folgenden Erscheinungen mit den ihnen vielleicht zu Grunde liegenden Ursachen, und daher durch

auf rein empirischem Wege erhaltene Induction entstanden. Wo wir den Zusammenhang der Erscheinungen mit den ihnen vorausgehenden Veranlassungen nicht einsehen, schreiben wir sie dem Zufalle zu, obschon sie vielleicht nichts weniger als zufällig sind und denselben ewigen Gesetzen der Natur gehorchen, die wir an der Bewegung der Himmelskörper, die wir berechnen und eben daher mit Gewißheit voraussagen können, mit Recht bewundern. So ist die Erscheinung eines neuen Kometen ein Zufall für diejenigen, welche diese Körper für Meteore halten und die Regelmäßigkeit ihrer Bewegung nicht kennen, während sie für den Astronomen nur die nothwendige Folge eines eben so einfachen, als allgemeinen Naturgesetzes seyn kann. Das Wort Zufall bezeichnet daher nichts, als unsere Unwissenheit über die Ursachen der Phänomene, die wir kommen und sich aufeinander folgen sehen, ohne den Grund derselben angeben, und ohne selbst eine scheinbare Ordnung in der Aufeinanderfolge derselben bemerken zu können. Wo aber, zwar nicht jener innere Grund, aber doch diese regelmäßige Folge der Erscheinungen sehr oft und beynahe immer beobachtet wird, da vermuthen wir mit Recht ein, uns zwar unbekanntes, aber demungeachtet nicht weniger fest gegründetes Gesetz, welches jene Erscheinungen bisher erzeugt hat und daher auch in der Folge mit derselben Regelmäßigkeit wieder erzeugen wird, und dieß ist der Fall bey den oben angeführten Beobachtungen über das allmählige Aussterben einer geschlossenen Gesellschaft von Menschen. Hat man diese Beobachtungen mit der gehörigen Umsicht aus den Erfahrungen mehrerer Jahrhunderte in verschiedenen Ländern gesammelt, so erhält man endlich eine sogenannte Sterblichkeits-Tabelle, die uns zeigt, wie viel von einer bestimmten Anzahl in demselben Jahre geborner Menschen in den verschiedenen folgenden Jahren durch den Tod entfernt werden, bis endlich die ganze Anzahl ausgestorben ist.

Wir besitzen bereits viele solcher Sterblichkeits-Tabellen, die aber nicht alle gleich verläßlich sind. Die früheren, wie die von Halley, sind noch unvollkommen, weil es ihnen an einer hinlänglichen Anzahl sicherer Beobachtungen fehlt; andere, wie die von Simpson, Kerseboom, u. a. sind nur aus den Tauf- und Sterbelisten großer Städte, wie London und Paris, abgeleitet, wo die Sterblichkeit viel größer ist, als in kleinen Städten und auf dem Lande; die sonst sehr gerühmte Northamptonsche von Price gilt unmittelbar nur für diese Stadt; die mit ungemeiner Sorgfalt von Wargentin entworfene Tafel bezieht sich bloß auf Schweden, dessen Sterblichkeit von jener der südlicheren Länder Europens sehr verschieden ist; anderer von Deparcieux, Florencourt, Kritter, Lambert, u. s. nicht zu erwähnen. Als die vorzüglichste, wenigstens für Deutschland, wird beynahe allgemein diejenige betrachtet, welche in der vierten Ausgabe der „göttlichen Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechtes, von Süßmilch 1775" enthalten ist, und welche ursprünglich von Süßmilch selbst entworfen, und später von Baumann, dem Herausgeber der vierten Auflage jenes Werkes, verbessert worden ist.

Diese Baumann-Süßmilch'sche Sterblichkeits-Tabelle ist in der am Ende dieses Werkes beygefügten Tab. I enthalten. Sie besteht eigentlich nur aus den beyden ersten senkrechten Columnen, welche die Ueberschrift „Alter und Lebende" tragen. Die übrigen Columnen sind aus jenen beyden abgeleitet, wie wir sogleich näher sehen werden.

Diese beyden ersten Columnen zeigen an, wie viele von 1000 in einem Jahre gebornen Menschen, am Ende eines jeden Jahres noch am Leben sind. So leben z. B. von 1000 Gebornen am Ende des 40sten Jahres noch 374. Von doppelt oder halb so viel in einem Jahre Gebornen lebt also auch am Ende des 40sten Jahres das Doppelte oder die Hälfte von 374, oder von 2000 Gebornen leben am Ende des 40sten Jahres noch 748, und

von 500 Gebornen leben am Ende des 40sten Jahres noch 187 u. f. Eben so zeigt diese Tafel, daß von 374 in einem Jahre zusammen lebenden 40jährigen Menschen, nach 10 Jahren, wo sie alle 50 Jahre alt sind, nur noch 300 beysammen leben, also auch von 748 nur 600 und von 187 nur 150 u. s. w.

Endlich zeigt diese Tafel noch, wie viel gleich alte Personen einer gegebenen Gesellschaft nach einer gegebenen Anzahl von Jahren noch am Leben sind, z. B. von 120 vierzigjährigen Personen werden 96 zusammen fünfzig Jahre alt, denn

$$374 : 300 = 120 : x \text{ oder } x = 96.$$

Ueberhaupt aber lehrt diese Tafel, daß von 1000 in einem Jahre Gebornen am Ende des 4. Jahres noch 593 ein Jahr zusammen leben; daß von diesen nur noch 579 ein Jahr zusammen leben, und von diesen noch 567 ein Jahr zusammen u. f., und daß an einem Orte, wo jährlich 1000 Kinder geboren werden, 593 Vierjährige, 579 Fünfjährige u. f. davon leben.

Die Columne B zeigt, wie viel von 1000 in einem Jahre Gebornen am Ende eines jeden Jahres gestorben sind. Die Zahlen dieser Columne findet man, wenn man die zwey nächststehenden Zahlen der Columne A von einander subtrahirt. So ist $1000 - 750 = 250$ und $750 - 661 = 89$ u. f. Eben so: Addirt man die 3, 4, 5. ersten Zahlen der Columne B, so erhält man dieselbe Summe, wenn man die 4, 5, 6. Zahl der Columne A von 1000 subtrahirt. So hat man für die drey ersten Zahlen in B die Summe $250 + 89 + 43 = 382$ und $1000 - 618 = 382$ wie zuvor.

Die Columne C enthält die Summe aller Zahlen der Columne A, von unten auf addirt. Diese Columne C zeigt also die Summe aller Lebenden an einem Orte, wo jährlich 1000 geboren werden, und eben so viele sterben. So leben an einem solchen Orte 8653 Vierzigjährige, 223 Achtzigjährige u. f. Dieselbe Columne zeigt auch, daß 593 vierjährige Menschen zusammen ge-

nommen 25959 Jahre, und 37 Achtzigjährige zusammen genommen noch 223 Jahre leben.

Nimmt man daher für irgend ein Lebensalter der ersten Columne die nächstfolgende Zahl der Columne C, und dividirt diese Zahl durch die entsprechende Zahl der Columne A, so erhält man die sogenannte mittlere Lebensdauer oder die Zahlen der Columne F, das heißt, man erhält die Anzahl Jahre, die ein jedes Individuum des angenommenen Lebensalters noch leben müßte, wenn sie alle gleich alt werden sollten. Dabey wird der Kürze wegen vorausgesetzt, daß die im Laufe eines Jahres sterbenden Personen alle im Anfange des Jahres sterben. Nimmt man aber der Natur der Sache gemäßer an, daß sie während dem Laufe des Jahres gleichförmig nach einander absterben, daß sie also, im Allgemeinen, alle noch die Mitte des Jahres erreichen, so wird man zu dem vorhergehenden Quotienten noch $\frac{1}{2} = 0.5$ addiren, um die mittlere Lebensdauer zu erhalten. So ist z. B. die mittlere Lebensdauer eines achtzigjährigen Menschen nach den Columnen C und A gleich $\frac{186}{37} + \frac{1}{2} = 5.53$ und die eines fünfzehnjährigen Menschen gleich $\frac{19451}{511} + \frac{1}{2} = 38.56$ Jahre u. s. w.

Diese mittlere Lebensdauer muß aber von der sogenannten wahrscheinlichen Lebensdauer unterschieden werden. Die wahrscheinliche Lebensdauer eines Menschen von gegebenem Alter ist die Zeit, in welcher die Hälfte der Personen dieses Alters gestorben ist. Um z. B. die wahrscheinliche Lebensdauer eines fünfzehnjährigen Menschen zu finden, gibt die Columne A die Zahl 511, und dessen Hälfte 255 steht in derselben Columne A bey dem Alter von 55, also ist die wahrscheinliche Lebensdauer eines fünfzehnjährigen Menschen 55 — 15 = 40

Jahre. Eben so findet man die wahrscheinliche Lebensdauer eines 40, 60, 80jährigen Menschen gleich 23, 11, 5 Jahre u. s. Sie heißt die wahrscheinliche Lebensdauer, weil es wahrscheinlicher ist, daß z. B. ein Mensch von 40 Jahren noch 23 Jahre lebe, als daß er früher oder später sterbe.

Die zwey übrigen Columnen D und E werden erst später ihre Anwendung finden; doch können sie des Zusammenhanges wegen, schon hier erklärt werden.

Es ist wohl jedem meiner Leser bekannt, daß ein gegebenes Capital, wenn man die jährlichen Zinsen und Zinseszinsen dazu legt, z. B. nach drey Jahren gleich wird dem gegebenen Capitel dreymahl in den Zinsfuß multiplicirt, zu welchem man es ausgeliehen hat. Hat man es z. B. zu 5 prC. ausgeliehen, so ist der Zinsfuß $\frac{105}{100}$ oder kürzer 1.05. Wir werden im folgenden diesen Zinsfuß 1.05 immer beybehalten, wo nicht das Gegentheil ausdrücklich erinnert wird. So ist z. B. ein Capital von 1000 fl. auf Zinseszinsen ausgelegt, nach einem Jahr gleich (1.05) 1000 = 1050, nach zwey Jahren gleich (1.05) (1.05) 1000 = 1102.5, nach drey Jahren gleich (1.05)(1.05)(1.05) 1000 = 1157.625 u. s. w. Und eben so umgekehrt: Soll ein mit den Zinseszinsen vermehrtes Capital nach drey Jahren gleich einer bestimmten Summe seyn, so muß dieses Capital bey dem Ausleihen desselben oder im Anfange jener drey Jahre gleich jener Summe seyn, dreymal dividirt durch den angenommenen Zinsfuß. Soll z. B. ein Capital nach einem Jahre gleich 1000 Gulden seyn, so ist es jetzt gleich $\frac{1000}{1.05} = 952.3809$. Soll es erst nach zwey Jahren gleich 1000 Gulden seyn, so ist es jetzt $\frac{1000}{(1.05)(1.05)} = 907.0295$. Soll es nach drey Jahren gleich 1000 Gulden seyn, so ist es jetzt $\frac{1000}{(1.05)(1.05)(1.05)} = 863.8376$ u. s. Man nennt dieß ein

Capital auf eine gegebene Anzahl Jahre zurück discontiren. Diese und die vorhergehenden Zahlen, weiter fortgesetzt, enthalten die zweyte und dritte Columne der Tafel II für ein Capital von einem Gulden. Multiplicirt man sie durch 10, 100, 1000, so erhält man die entsprechenden Zahlen für ein Capital von 10, 100, 1000 Gulden u. f. Um übrigens die Zahl 1.05 im Nenner dieser Brüche nicht so oft zu schreiben, drückt man sie kürzer so aus

$$(1.05)(1.05) = (1.05)^2$$
$$(1.05)(1.05)(1.05) = (1.05)^3$$
$$(1.05)(1.05)(1.05)(1.05) = (1.04)^4 \text{ u. f.,}$$

so, daß daher überhaupt ein Capital, welches nach n Jahren gleich A Gulden seyn soll, jetzt oder im Anfange dieser n Jahre gleich der Summe von $\frac{A}{(1.05)^n}$ seyn wird. Wäre das Capital zu 4 oder 3 prC. ausgeliehen worden, so würde jenes Capital A auf n Jahre zurück discontirt gleich $\frac{A}{(1.04)^n}$ oder $\frac{A}{(1.03)^n}$ seyn. Es ist für sich klar, daß bey solchen Rechnungen die bekannten Logarithmentafeln von vorzüglichem Nutzen sind. Indessen erhalten wir auch durch die erwähnte Tafel II ein einfaches Mittel, diese Disconto auch ohne Hülfe der Logarithmen leicht zu finden.

Sieht man nun die Zahlen der Columne A als die Capitalien, und die Zahlen der ersten Columne als die Werthe von n an, so gibt der letzte Ausdruck $\frac{A}{(1.05)^n}$ die entsprechenden Zahlen der Columne D. So ist z. B.

$$\frac{300}{(1.05)^{50}} = 26.16112 \text{ und } \frac{291}{(1.05)^{51}} = 24.16789 \text{ u. f.}$$

Wenn also z. B. von 1000 zusammen Gebornen jeder fünfzigjährige Mensch einen Gulden, also alle fünfzigjährigen (wie die Columne A zeigt) zusammen die Summe von 300 Gulden

in eine Casse legen, so zeigt die Columne D, daß diese Summe von 300 Gulden vor 50 Jahren nur 26.16112 werth war, oder mit anderen Worten, daß, wenn diese 300 Menschen bey ihrer Geburt zusammen 26.16112, also jeder einzeln nur 0.0872 Gulden eingelegt hätten, sie jetzt, am Ende ihres 50sten Jahres, ein durch Zinseszinsen vermehrtes Capital von 300 Gulden besitzen würden.

Die Zahlen der Columne E endlich sind die Summen der Zahlen der Columne D, von unten addirt, wie der erste Blick auf beyde Columnen zeigt. Wir werden weiter unten den Nutzen dieser beyden Columnen näher kennen lernen [*]).

Man sieht, daß die ganze Einrichtung dieser Tafel auf den Zahlen der Columne A beruht, welche Columne auch, wie bereits gesagt, die eigentlich sogenannte Mortalitätstafel ist. Diese Zahlen der Columne A sind aber aus unmittelbaren Beobachtungen, aus Vergleichungen der Geburts- und Sterbelisten verschiedener Zeiten und Orte abgeleitet, und daher desto genauer, je genauer und umfassender jene Beobachtungen selbst angestellt und unter einander verbunden worden sind. Da nun Beobachtungen und Erfahrungen, wie überhaupt alle menschlichen Unternehmungen, besonders bey so verwickelten und von vielerley Zufällen abhängenden Untersuchungen, nie ganz fehlerfrey sind, so werden ohne Zweifel auch jene Zahlen der Columne A noch einer genaueren Bestimmung fähig seyn, wozu uns die Erfahrungen künftiger Jahrhunderte die Mittel liefern werden. Indessen sind die Correctionen, welche diese Zahlen noch bedürfen mögen, gewiß nur sehr klein und der Art, daß sie auf die feste Gründung und die sichere Dauer eines Wittweninstitutes keinen wesentlichen Einfluß mehr haben können. Dieß folgt schon aus der Vergleichung mehrerer Sterblichkeits-Tabellen, welche von verschiedenen Schriftstellern aus ihren eigenen, und von denen der anderen unabhängigen Beobachtungen gegeben worden sind. Zum Beweise führe ich hier

einige derselben an, die so wie Süßmilch und Baumann, ihre Erfahrungen meistens in den Landstädten gesammelt haben, da große und volkreiche Städte, wie bereits S. 11 erinnert wurde, einer größeren Sterblichkeit unterliegen, und daher auch ganz andere, zu unserer Vergleichung nicht gehörende Resultate geben müssen.

Die als die besten für Deutschland anerkannten Sterblichkeits-Tabellen sind, nebst der schon erwähnten, die von Baumann aus Beobachtungen in der Churmark gesammelten, die von Kritter für die Calenbergische Wittwenanstalt entworfenen, und die von Lambert im dritten Theile seiner Beyträge mitgetheilten Tafeln, von welchen hier ein kurzer Auszug folgt.

Alter.	Süßmilch von Baumann corrigirt.	Baumann aus der Churmark.	Kritter.	Lambert.	Simpson für London.
n	A	A	A	A	A
30	439	452	446	452	301
40	374	387	385	374	229
50	300	317	310	297	159
60	210	223	215	208	102
65	162	168	166	156	77
70	112	113	121	109	54
75	69	64	79	68	36
80	37	32	39	34	23

Ich habe ihnen die von Simpson für London entworfene Mortalitätstafel beygefügt, um gleichsam mit einem Blicke die ungemeine Größe der Sterblichkeit volkreicher Städte gegen die des freyen Landes übersehen zu können. Vergleicht man die Zahlen der vier ersten Tafeln untereinander, so findet man meistens nur geringe, und für unsern Zweck größtentheils unbeträchtliche Unterschiede. Die Klagen derjenigen müssen daher als ungegründet zurück gewiesen werden, welche diese Mortalitätstabellen noch

als zu ungewiß verschreyen, und da sie die Basis der inneren Einrichtung eines jeden Wittweninstituts seyn sollen, diese Einrichtung selbst nicht sowohl einer strengen und mühsamen Berechnung unterwerfen, sondern nur nach einem allerdings viel bequemeren sogenannten beyläufigen Ueberschlage, nach ihrer Willkühr, auf Gerademohl anordnen wollen. Einfälle solcher Art müssen fern gehalten werden von einer Anstalt, die das Glück von oft viel Tausenden hülfloser Wittwen und unmündiger Waisen so nahe angeht, und die bestimmt ist, die Thränen derselben zu trocknen, nicht aber durch den Leichtsinn oder die Bequemlichkeit ihrer Gründer neue, und oft sehr bittere zu erzeugen. Allerdings werden durch die fortgesetzten Erfahrungen unserer Nachfolger jene Tafeln noch einige Verbesserungen erhalten, aber das berechtigt uns nicht, die bereits gesammelten Erfahrungen, als wären sie gar nicht da, zu vernachlässigen, und das Schicksal so vieler Unglücklichen unseren Meinungen oder dem blinden Zufalle zu überlassen, um so weniger, da, wie wir gesehen haben, diese Tafeln durch die Bemühungen unserer Vorgänger der Wahrheit bereits so nahe gebracht worden sind, daß wir zu unserer Absicht sicher auf sie vertrauen können, und da endlich die noch übrige kleine Unsicherheit dieser Tafeln die einzige ist, welcher die Einrichtung einer Wittwenanstalt ausgesetzt seyn kann. Denn alles übrige Verfahren ist, so wie die Zahlen der folgenden Columen B, C, D ... nicht mehr dem Zufalle oder den aus unseren Beobachtungen entspringenden Irrthümern unterworfen, sondern reines Resultat der Rechnung und daher mathematisch richtig und über allen Zweifel erhoben, so daß, wer die Richtigkeit desselben noch weiter in Anstand nehmen wollte, nur seine eigene Unkenntniß des Gegenstandes dadurch beweisen würde.

Noch wird es nöthig seyn, ehe ich zu den folgenden Untersuchungen übergehe, einige Worte über den eigentlichen Zweck und Inhalt dieser Mortalitätstabellen, so wie der auf ihnen be-

ruhenden Wahrscheinlichkeitsrechnung mitzutheilen, da dieselben von den mit diesen Gegenständen weniger bekannten Lesern nur zu oft schon mißverstanden worden sind.

Es wurde oben (S. 11) gesagt, daß nach unserer Tabelle von 1000 zugleich Gebornen nach 40 Jahren noch 374,

also auch von 500 noch 187
von 100 noch 37
von 10 noch 4
von 5 noch 2
und von 3 noch 1 leben werde. Das ist aber keinesweges so zu verstehen, als wollte man damit die Dauer des Lebens irgend eines *einzelnen bestimmten* Menschen angeben, eine Frage, die uns zu beantworten immer unmöglich bleiben wird. Diese Tafel sagt uns vielmehr nur, daß von 1000 zugleich gebornen Menschen am Ende des 40sten Jahres noch 374 oder nahe $\frac{3}{8}$ der früheren Anzahl *wahrscheinlich* am Leben seyn werden, und daß diese Wahrscheinlichkeit der *Wahrheit* um so näher kommen werde, je größer die Anzahl der anfangs zusammen Gebornen genommen wird. So sollen, nach dieser Aussage, von 8 in einem Jahre gebornen Menschen $\frac{3}{8}$ das heißt also, drey Menschen noch 40 Jahre leben, allein es ist immer möglich, daß einer von ihnen, oder auch zwey oder daß endlich sogar alle drey noch vor dem 41sten Jahre sterben, obschon es im Allgemeinen am wahrscheinlichsten ist, daß alle drey noch dieses Lebensjahr erreichen. Allein viel wahrscheinlicher wird es seyn, daß von einer *größeren* Anzahl zugleich Gebornen der $\frac{3}{8}$te Theil derselben dieses Jahr erreiche. Es werden daher

wahrscheinlich von 80 Menschen noch 30
und noch mehr von 160 — — 60
und noch mehr von 240 — — 90 weitere 40 Jahre le-

ben; und so steigt die Wahrscheinlichkeit der Behauptung, daß von einer gewissen Anzahl zugleich Geborner noch $\frac{3}{8}$ das 41ste Jahr erreichen, wie diese Anzahl selbst steigt, so daß man endlich beynahe mit Gewißheit sagen kann, daß von einer Million zugleich Geborner noch $\frac{3}{8} = 375000$ oder genauer 374000 jenes Lebensalter erreichen werden.

So wenig sich also aus jenen Mortalitätstafeln für das Leben oder den Tod des einzelnen Individuums voraus sagen läßt, so viel läßt sich daraus für die Lebensdauer ganzer Gesellschaften solcher Individuen bestimmen, und diese Bestimmungen werden immer desto genauer, der Wahrheit desto näher seyn, je zahlreicher diese Gesellschaft selbst ist. Dieß ist auch die Ursache, warum kleine Wittwengesellschaften immer unsicher sind, und warum man daher darauf sehen muß, so viele Mitglieder derselben, als möglich, zu erhalten, weil jene Tafeln, die der Einrichtung und Berechnung aller dieser Gesellschaften zu Grunde liegen sollen und müssen, immer desto anwendbarer und sicherer werden, je zahlreicher diese Gesellschaft selbst ist. Nur muß dieser Zweck, eine große Anzahl Mitglieder, immer als ein suborbinirter Zweck betrachtet werden, und keineswegs dem oben S. 4 ausgesprochenen Hauptzwecke, der gehörigen Abwägung der Einlagen und der Pensionen, im Wege stehen, oder man muß nicht bloß recht viele Mitglieder durch unmäßige Versprechungen anzulocken suchen, die man nicht erfüllen kann, oder die, wenn man sie demungeachtet an den ersten Wittwen des Instituts erfüllt, die letzten der Noth und dem Hungertode preisgeben.

Ganz dasselbe ist auch von der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu bemerken. Wenn man z. B. auf Geradewohl *in eine Urne* greift, in welcher viele kleine Kugeln liegen, so zeigt

uns die Wahrscheinlichkeitsrechnung, daß man mit einem Griffe, nicht eine gerade oder 2, 4, 6 .. sondern daß man eine ungerade Anzahl also 1, 3, 5, 7, 9 .. Kugeln herausziehen wird. Das ist nun nicht so zu verstehen, als ob der erste Zug auch in der That eine ungerade Anzahl Kugeln enthalten müsse: er wird vielleicht eine gerade, ja auch der zweyte, vielleicht selbst der dritte Zug wird noch eine gerade Anzahl haben. Aber die Rechnung hat nicht die Absicht, zu sagen, welches der Erfolg des ersten, des zweyten oder des dritten Zuges seyn wird, sondern sie zeigt bloß: daß bey sehr vielen und oft wiederholten Zügen mehrere mit einer ungeraden, und daher weniger mit einer geraden Anzahl von Kugeln seyn werden, und daß diese Behauptung der Wahrheit desto näher kommen werde, je größer die Anzahl der Züge selbst ist. Bey 100 Zügen wird also die Anzahl der ungeraden wahrscheinlich schon die der geraden übertreffen, und diese Wahrscheinlichkeit wird noch größer bey 1000, und noch größer bey 10000 Zügen seyn u. s. Auf diese Art also müssen die Resultate der Wahrscheinlichkeitsrechnung verstanden werden: sie betreffen, so wie oben die Resultate der Mortalitätstafeln, nicht einzelne, individuelle Ereignisse, sondern sie beziehen sich nur auf ganze Sammlungen ähnlicher Fälle, und sind immer um so genauer, je zahlreicher diese Sammlungen selbst sind. Wer sie anders versteht und von der Rechnung Dinge fordert, welche diese nicht zu leisten versprochen hat, muß seine eigene Unkenntniß des Gegenstandes anklagen, nicht aber, wie es bereits geschehen ist, daraus den Schluß ziehen, daß bey einer so unsicheren Basis, wie die Sterblichkeitstafel, und bey einem so unverläßlichen Kalkul, wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung, alles strenge Berechnen eines Witweninstituts eigentlich überflüssig ist, und daß man sich daher ganz eben so gut mit einem sogenannten beyläufigen Ueberschlage begnügen könne.

Wir wollen diesen Gegenstand mit einigen Bemerkungen

beschließen, die sich unmittelbar aus der Betrachtung der Sterblichkeits-Tabellen ergeben.

Von der ganzen Anzahl der Kinder, die an einem Tage geboren werden, ist nach einem Jahre gewöhnlich schon der vierte Theil wieder in das Grab gegangen, so daß die Sterblichkeit der Menschen in dem ersten Jahre nach ihrer Geburt sehr groß ist. Von denselben Kindern ist nach 18 Jahren schon die Hälfte, nach 55 Jahren drey Viertheile gestorben, und im 96sten Jahre ist keiner mehr von ihnen übrig. Ueberhaupt sterben von 1000 zugleich Gebornen

im ersten Jahre		250			
in den 5 Jahren	0 bis 5 Jahren	421			
von	5 bis 10	— 47	und von	0 bis 10 Jahren	468
	10 — 15	— 21		0 — 15 —	489
	15 — 20	— 20		0 — 20 —	509
	20 — 25	— 25		0 — 25 —	534
	25 — 30	— 27		0 — 30 —	561
	30 — 35	— 30		0 — 35 —	591
	35 — 40	— 35		0 — 40 —	626
	40 — 45	— 35		0 — 45 —	661
	45 — 50	— 39		0 — 50 —	700
	50 — 55	— 45		0 — 55 —	745
	55 — 60	— 45		0 — 60 —	790
	60 — 65	— 48		0 — 65 —	838
	65 — 70	— 50		0 — 70 —	888
	70 — 75	— 43		0 — 75 —	931
	75 — 80	— 32		0 — 80 —	963
	80 — 85	— 20		0 — 85 —	983
	85 — 90	— 11		0 — 90 —	994

Die Lebenskraft scheint anfangs sehr gering, im zweyten Lebensalter schon dreymal, im dritten sechsmal, im vierten zehnmal größer als im ersten Jahre, und zwischen dem 11. und 20sten Jahre am größten zu seyn. Von da nimmt sie wieder ab, bis sie endlich im 92sten Lebensjahre wieder so schwach wird, wie im ersten, so daß von vier 92jährigen Greisen wieder jährlich einer

stirbt. Nach derselben Tafel wird der 96jährige Greis wahrscheinlich noch in diesem Jahre sterben, und ein Alter von 97 Jahren selbst für den 96jährigen Mann schon eine große Seltenheit seyn. Die Wahrscheinlichkeit, weiter zu leben, wächst also von der Stunde der Geburt immer mehr, je weiter man sich von dieser Stunde entfernt, bis nahe zum 20sten Jahre, wo dann diese Wahrscheinlichkeit wieder mit jedem folgenden Jahre abnimmt, und der Mensch sich seiner Auflösung allmählig nähert, und wer das achtzehnte Jahr erreicht hat, genießt schon ein Glück, welches nur der Hälfte der Menschen zu Theil wird. Die Columne F, deren Zahlen immer von der wahrscheinlichen Lebensdauer nur wenig verschieden sind, zeigt, daß man in seinem 29sten Jahre gewöhnlich die Hälfte seines Alters erreicht hat, im 13ten den vierten Theil, im 18ten den dritten Theil, im 56sten drey Viertheile u. s.

Viel größer aber ist die Sterblichkeit für große und volkreiche Städte, wie die letzte Columne der Tafel (S. 17) zeigt. Nehmen wir an, daß in einer solchen Stadt, wie London, in einem Jahre 10000 Menschen geboren werden, so sind in 30 Jahren von denselben schon 6990 gestorben, also 1380 mehr als auf dem Lande von derselben Anzahl in 30 Jahren sterben. Allein besser noch übersieht man dieses Mißverhältniß, wenn man aus den Kirchenbüchern der verschiedenen Orte die Summe aller Lebenden zu der Anzahl der an demselben Orte jährlich Gestorbenen sucht. Man findet so das Verhältniß der Lebenden zu den jährlich Gestorbenen

für London	24 : 1
für Wien	28 : 1
für kleine Städte	32 : 1
für das freye Land	40 : 1

oder von 40 Landleuten stirbt jährlich einer, während in London schon von 24 jährlich einer stirbt, d. h. mit anderen Worten: 1000 Personen sterben jährlich auf dem Lande von 40000 und in

London schon von 24000 Menschen. Diese Stadt hat nach den neuesten Angaben eine Bevölkerung von 1230000 Einwohnern, also sterben daselbst jährlich 51250 Menschen, während von eben so viel oder von 1230000 Landleuten jährlich nur 30750, also 20500 weniger sterben, so daß in einem Zeitraume von 5 Jahren schon über 100000 mehr als auf dem Lande sterben, eine Differenz, die in einem Jahrhunderte bereits über zwey Millionen Menschen beträgt, die in der Stadt mehr, als auf dem Lande, aus der Bevölkerung des Reiches verschwinden. — Oesterreich hat nahe 30 Millionen Einwohner, also würden in diesem Reiche, wenn die sämmtlichen Einwohner desselben Landleute wären, in jedem Jahre von 40 einer, oder in allem jährlich 750000, oder endlich in 15 Monaten gewöhnlich eine Million sterben. Auf der ganzen Erde sollen 960 Millionen Menschen leben, also sterben auch, nach jenem Verhältnisse, auf der Erde jährlich 24 Millionen, oder täglich 65750 oder stündlich 2740, oder endlich in jeder Minute sterben auf der ganzen Erde nahe 45 Menschen, vorausgesetzt, daß alle die gesunde Luft unserer Landleute athmen und sich derselben einfachen Bedürfnisse und derselben natürlichen Lebensart erfreuen. Wenn aber im Gegentheile alle Bewohner der Erde unter denselben künstlichen und unnatürlichen Verhältnissen, wie die Einwohner Londons, sich befänden, so würden von den 30 Millionen Oesterreichs jährlich 1250000, also 500000 mehr als jetzt sterben, und wenn dasselbe von der ganzen Erde der Fall wäre, oder wenn überhaupt von 24 Menschen jährlich einer stürbe, so würden von den 960 Millionen, welche die Erde bewohnen, jährlich 40 Millionen, also jährlich 16 Millionen Menschen mehr sterben, als jetzt. Nach dem gewöhnlichen Verhältnisse der Städte und Dörfer beträgt das Uebermaß der Sterblichkeit in den Städten über das in den Dörfern bey den meisten Ländern in 25 Jahren nahe so viel, als sonst eine allgemeine

Pest wegzuraffen pflegte, so daß also der Staat, durch das Zusammenpferchen der Menschen in Städten, einen Schaden an seiner Bevölkerung leidet, die einer alle 25 Jahre wieder kommenden Pest gleicht. Und wer wird den wohl noch viel größeren Schaden berechnen, welcher durch die moralische Pest der Städte über das Land gebracht wird? Wer in solchen Ländern gereist ist, in welchen sich erst einige der größeren Städte zur sogenannten Kultur erhoben und dadurch ihre nächsten Umgebungen unsicher gemacht haben, während die übrigen Gegenden noch der Einfalt der Natur und der Sitten huldigen, wird diese Frage genügend beantwortet finden, wenn er sich einem jener verpesteten Lager besonders zur Nachtszeit nähert.

Daß übrigens bey allen diesen Betrachtungen nur von der gewöhnlichen Sterblichkeit eines Landes die Rede ist, versteht sich von selbst. Mißjahre, Hungersnoth, ansteckende Krankheiten, blutige Kriege und wie diese Wohlthaten der Menschheit alle heißen, gehören glücklicher Weise doch nur zu den Ausnahmen von der Regel, und man muß es billig andern, die es mehr angeht, überlassen, zu berechnen, wie viel Glück und Segen dadurch über die armen, bedrängten Menschenkinder gebracht werden mag.

Zweytes Capitel.

Zeitrenten.

Wenn ich einem anderen ein gewisses Capital mit der Bedingung überlasse, daß er dieses Capital für immer behalte, und mir dafür durch eine bestimmte Anzahl, z. B. durch 20 Jahre, jährlich eine bestimmte Summe gebe, so errichte ich eine Zeitrente. Verlange ich aber dafür eine bestimmte jährliche und bis an das Ende meines Lebens auszuzahlende Summe, so errichte ich eine Leib- oder Lebensrente. Von dieser zweyten werden wir in dem folgenden Capitel sprechen: das gegenwärtige ist bloß den Zeitrenten gewidmet.

Zuerst müssen wir aber die folgenden zwey Fragen beantworten.

Erste Frage. Wie groß wird ein Capital, welches ich heute zu 5 pCt. ausleihe, nach einer gegebenen Anzahl von Jahren seyn, wenn jährlich die Zinsen und Zinseszinsen desselben zu dem Capital geschlagen werden?

Diese Frage beantwortet die schon oben erwähnte zweyte Columne der Tafel II. Diese Columne gibt nämlich den Werth eines heute ausgelegten Capitals von einem Gulden, den es durch den Anwachs von Zinsen und Zinseszinsen nach m Jahren haben wird. — Sucht man daher den Werth irgend eines anderen Capitals nach m Jahren, so wird man nur dieses Capital mit der bey m stehenden Zahl dieser zweyten Columne multipliciren.

Ex. Wie groß wird ein heute ausgelegtes Capital von 6400 fl. am Ende des dreyzehnten Jahres seyn, die Interessen hier und immer zu 5 von 100 gerechnet?

Hier ist m = 13 und daher die Zahl der zweyten Columne 1.88564 91423. Multiplicirt man diese Zahl durch 6400, so erhält man 12068.154 fl. für den gesuchten Werth jenes Capitals von 6400 fl. nach dreyzehn Jahren. Wenn ich also Jemand die Summe von 6400 fl. auf Zinseszinsen leihe, so ist er mir dafür nach dreyzehn Jahren 12068.154 fl. zu geben schuldig. Eben so werden 1000 fl. nach hundert Jahren 131501.2578 fl. betragen u. s. w.

Zweyte Frage. Nach einer gewissen Anzahl Jahre will ich von meinem Schuldner eine bestimmte Summe fordern: wie viel muß ich ihm jetzt auf Zinseszinsen leihen, um dadurch zu jener Forderung berechtiget zu werden?

Diese Frage beantwortet die dritte Columne derselben Tafel II. Diese Columne gibt nämlich den Werth eines Capitals von einem Gulden vor m Jahren, oder sie zeigt, wie groß ein Capital heute seyn muß, wenn es nach m Jahren einen Gulden betragen soll. — Sucht man daher den Werth irgend eines anderen gegebenen Capitals, den es vor m Jahren hatte, so wird man nur dieses Capital mit der bey m stehenden Zahl dieser dritten Columne multipliciren.

Ex. I. Wie viel muß ich jetzt meinem Schuldner auf Zinseszinsen leihen, um nach zehn Jahren von ihm 10000 fl. fordern zu können?

Hier ist m = 10 und die entsprechende Zahl der zweyten Columne 0.61391 32535. Multiplicirt man diese Zahl durch die verlangte Summe oder durch 10000, so erhält man 6139.132 fl. für die gesuchte Summe, welche ich ihm jetzt leihen muß, um nach zehn Jahren dafür 10000 fl. zu erhalten.

Ex. II. Wie viel muß man ausleihen, um nach dreyzehn Jahren 12068.154 zu erhalten?

Hier ist m = 13 und die Zahl der dritten Columne gleich 0.53032 13506. Diese Zahl mit 12068.154 multiplicirt gibt

6400 fl., übereinstimmend mit dem vorhergehenden ersten Beyspiele.

Man wird von selbst bemerken, daß diese dritte Columne eigentlich überflüssig ist, und daß man die zweyte Frage auch dadurch beantworten kann, wenn man die nach m Jahren verlangte Summe durch die entsprechende Zahl der zweyten Columne dividirt. So ist in dem ersten unserer Beyspiele

$$\frac{10000}{1.6288946268} = 6139.132$$

und in dem zweyten

$$\frac{12068.154}{1.8856491423} = 6400 \text{ wie zuvor.}$$

Da aber die Multiplication bequemer ist, als die Division mit größeren Zahlen, so wurde diese dritte Columne noch hinzugefügt*), um so mehr, da wir sie sogleich auch unmittelbar zur Bestimmung der Zeitrenten selbst werden anwenden können.

Probl. Ich will von Jemand eine gewisse jährliche Zeitrente durch eine bestimmte Anzahl Jahre ziehen: welche Summe Z muß ich ihm dafür gleich jetzt erlegen, damit er mir von dieser auf Zinseszinsen angelegten Summe die gewünschten jährlichen Renten geben kann?

Aufl. Man subtrahire die der Anzahl der Rentenjahre entsprechende Zahl der dritten Columne der Tafel II von der Einheit, und multiplicire diese Differenz mit der 20fachen jährlichen Rente, so ist das Product die gesuchte Summe, welche ich jetzt erlegen muß, oder mit andern Worten: dieses Product ist der gesuchte Werth Z der verlangten jährlichen Rente.

Ex. I. Ich will eine jährliche Rente von 120 fl. durch zehn Jahre ziehen: welche Summe Z muß ich dafür jetzt in die Rentcasse erlegen?

Aufl. Hier ist m = 10, also die Zahl der dritten Co-

lumne 0.6139132 und ihre Differenz von der Einheit 0.3860868. Die letzte Zahl durch die 20fache Rente, d. h. durch 2400 multiplicirt, gibt $Z = 926.608$ fl. für die gesuchte in die Casse zu erlegende Summe, oder für den Werth dieser zehnjährigen Rente von 120 fl.

Ex. II. Sucht man eben so den Werth einer Zeitrente von jährlichen 100 fl. auf 50 Jahre, so ist die Zahl der dritten Columne 0.0872037 und ihre Differenz von der Einheit 0.9127963. Die letzte Zahl mit 2000 multiplicirt, gibt $Z = 1825.5926$ für den gesuchten Werth dieser Rente[3].

Noch kürzer endlich kann man diese Aufgabe mit Hülfe der vierten Columne der Tafel II auflösen. Wenn man nämlich die der Anzahl m der Jahre entsprechende Zahl dieser vierten Columne durch die jährliche Zeitrente multiplicirt, so erhält man sofort den gesuchten Werth dieser Rente selbst. So ist in dem ersten der vorhergehenden Beyspiele 7.7217349 mit 120 multiplicirt, gleich 926.608, und 18.25592546 mit 100 multiplicirt, gleich 1825.5925, wie zuvor. Die Ursache dieser Vereinfachung liegt darin, daß die Zahlen der vierten Columne gleich der Summe aller Zahlen der dritten Columne sind, wenn man die letzten von oben herab addirt[4].

Dieselbe vierte Columne wird uns endlich auch die umgekehrte Frage beantworten: Wenn ich mit einer bestimmten Summe eine jährliche Rente auf eine gegebene Anzahl Jahre kaufen will, wie groß wird diese Rente seyn?

Man dividire die gegebene Summe mit der entsprechenden Zahl der vierten Columne: der Quotient ist die gesuchte Größe der jährlichen Rente.

Ex. I. Wenn ich mit 500 fl. eine jährliche Rente auf zehn Jahre kaufen will, so wird die gesuchte Größe dieser Rente seyn $\frac{500}{7.7217349} = 64.7523$ fl.

Verlangt man endlich in der letzten unserer Fragen, statt der jährlichen Rente, eine halbjährige für dieselbe anfangs eingelegte Summe, so wird man die oben gefundene jährliche Rente (nicht durch 0.5), sondern durch 0.4939 multipliciren, um die gesuchte halbjährige Rente zu erhalten*). — So beträgt eine mit 500 fl. Einlage auf zehn Jahre erkaufte jährliche Rente, wie wir so eben gesehen haben, 64.7523 fl. Will man aber die Rente am Ende eines jeden halben Jahres gezahlt haben, so wird man in jedem Semester nur

(0.4939) (64.7523) = 31.9812 fl. fordern können.

Bey allen Vorhergehenden wird übrigens vorausgesetzt, daß man die jährliche oder Semestral-Rente nur immer am Ende des Jahres oder des Semesters, nicht am Anfange desselben, erhält. Soll aber die Jahresrente nicht nachträglich am Ende des Jahres, sondern sogleich im Anfange des ersten Jahres, also immer vorschußweise bezahlt werden, so wird man in der letzten Frage, ehe man die Division mit der Zahl der vierten Columne vornimmt, zuerst diese Zahl um die Einheit vermehren. Um z. B. mit 500 fl. eine jährliche Rente auf zehn Jahre zu kaufen, die vorschußweise immer im Anfange des Jahres bezahlt wird, so wird die Größe dieser Rente seyn

$$\frac{500}{8.7217349} = 57.3280$$

also um 7.4243 kleiner, als die nachträgliche Rente, die mit derselben Summe von 500 fl. erkauft werden kann.

Drittes Capitel.

Lebensrenten.

Man sieht aus dem Vorhergehenden, daß bey den Zeitrenten alles reines Resultat der Rechnung ist, daß also auch dabey keine Unsicherheit statt haben, und weder der Käufer noch der Verkäufer einen Schaden besorgen darf, wenn nämlich von den ganz unvorherzusehenden Wechselfällen des Glückes, z. B. von einer später erfolgenden Zahlungsunfähigkeit des Verkäufers u. dgl. abgesehen wird. Die Zeitrente wird so viele Jahre richtig bezahlt, als der anfängliche Vertrag bedungen hat, und wenn der Käufer vor dem Ablaufe der Rentenjahre sterben sollte, so geht die Rente während der noch übrigen Zeit auf die Erben desselben über, weil der Verkäufer, seinem Vertrage gemäß, mit seinen Rentenzahlungen nicht eher aufhören darf, bis die von dem Käufer anfangs erhaltene Summe sammt ihren Zinsen völlig abgetragen ist. Auch kann der Käufer seine Rente wieder an einen anderen verkaufen, selbst wenn er sie schon mehrere Jahre durch bezogen hat. Ganz anders aber verhält sich die Sache bey den Leib- oder Lebensrenten d. h. bey solchen für eine gewisse Summe gekauften Renten, die nicht bloß bis zu einer in dem anfänglichen Vertrage genau bestimmten Zeit, sondern die dem Käufer bis an das Ende des Lebens desselben jährlich ausgezahlt werden sollen. Die Dauer der Lebensrente hängt also von der Lebensdauer des Käufers ab, und da diese Lebensdauer nur durch die im ersten Capitel erklärten Sterblichkeits-Tabellen bestimmt werden kann, diese Tabellen aber, wie S. 20 gesagt wurde, nicht unmittelbar für eine individuelle Person, sondern nur für größere Gesellschaften gelten können, so folgt daraus, daß man Lebensrenten nicht

an eine, oder an einige wenige Personen, sondern ebenfalls nur an größere Gesellschaften verkaufen soll. Auch kann die Lebensrente, der Natur der Sache nach, von dem Käufer derselben an keinen anderen Menschen abgetreten werden, wie dieses wohl mit der Zeitrente der Fall ist, weil die Größe der Lebensrente allein nach der wahrscheinlichen Lebensdauer des bestimmten ersten Käufers durch die Mortalitätstafeln festgesetzt worden, und dieser erste Käufer daher eine gegebene individuelle Person ist, die von keiner andern vertreten werden kann, weil sich von keinem andern mit Bestimmtheit sagen läßt, daß er nicht länger und nicht kürzer, als der erste Käufer, leben werde, auf welchen letzten allein also der ganze Vertrag anwendbar ist. Uebrigens darf die Lebensrente, so lange der Käufer lebt, wohl von einem anderen bezogen werden, wenn er das Leben des Käufers und sein Recht, die Rente zu beziehen, beweisen kann, so wie jeder für jeden anderen eine Leibrente kaufen kann, die aber dann auch nur für diesen anderen gilt, der hier als der eigentliche Käufer betrachtet werden muß. Die Rente wird ausgezahlt, so lang der eigentliche Käufer derselben am Leben ist, und wenn der Tod des Käufers früh oder spät erfolgt, so erlischt der Vertrag und mit ihm die Auszahlung der Rente.

Wenn man wissen könnte, wie viele Jahre ein Mensch von einem bestimmten Alter noch leben wird, so würde auch der baare Werth seiner Lebensrente einerley seyn mit dem Werthe einer Zeitrente auf eben so viel Jahre. Jenes wissen wir nun nicht, aber dafür erfahren wir aus den Mortalitätstafeln, wie viele von einer größeren Anzahl gleichalter Menschen am Ende eines jeden folgenden Jahres noch am Leben seyn, und in welcher Zeit sie endlich sämmtlich absterben werden. Nimmt man daher an, was der Natur unserer Untersuchung am angemessensten ist, daß von dieser ganzen Anzahl gleichalter Personen auch jeder im Mittel gleich lange lebe und daher auch, für dieselbe Rente,

gleichviel bezahle, so wird die Casse bey allen diesen Mitgliedern dieselbe Aussicht zum Gewinne sowohl, als zum Verluste haben, und es wird daher desto wahrscheinlicher seyn, daß Gewinn und Verlust sich gegenseitig die Wage halten werden, je größer die oben angenommene Anzahl der gleich alten Personen seyn wird.

Suchen wir, diesem Grundsatze gemäß, den Werth L einer Leibrente, die jährlich mit einem Gulden ausgezahlt werden soll, für einen 90jährigen Menschen; d. h. also, suchen wir die Einlage L, welche ein 90jähriger Mensch der Casse geben muß, um dadurch für sich eine Lebensrente von jährlich einen Gulden zu begründen.

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir daher annehmen, daß (nach der zweyten Columne der Mortalitätstabelle) sechs 90jährige Menschen in die Rentengesellschaft treten, von welchen jeder, so lange er lebt, am Ende eines jeden Jahres einen Gulden von der Gesellschaft anspricht. Dieses vorausgesetzt, wird die Casse am Ende des ersten Jahrs (nicht 6, sondern weil nach der Taf. I bereits einer von den sechs 90jährigen Menschen gestorben ist, sondern nur) 5 Renten d. h. also nur 5 Gulden zu zahlen haben, und da sie diese 5 Gulden das ganze erste Jahr zu ihrem Nutzen verwenden konnte, so wird sie, indem sie diese 5 Gulden zahlt, eigentlich nur 5mal 0,9523809 zahlen (nach der dritten Columne der zweyten Tafel, weil jeder Gulden, auf ein Jahr zurück discontirt nur, 0,9523809 Gulden werth ist). Eben so wird die Casse am Ende des zweyten Jahres nur 4 Gulden zahlen, was dann eben so viel seyn wird, als hätte sie im Anfange des ersten Jahres nur 4mal 0,9070295 Gulden bezahlt. Am Ende des dritten Jahrs wird sie 3 Gulden, oder wieder auf den Anfang zurück discontirt, nur 3mal 0,8638376 Gulden, am Ende des vierten Jahres 2 oder eigentlich 2mal 0,8227025 und am Ende des fünften Jahres 1 oder eigentlich 0,7835262 Gulden zahlen, und

da, nach der Mortalitätstafel, am Ende dieses fünften Jahres die ganze Anzahl der sechs 90jährigen Menschen ausgestorben ist, so wird man den gesuchten Werth einer Leibrente für jeden dieser sechs Menschen erhalten, wenn man die Summe aller vorhergehenden, auf den Anfang zurück discontirten Zahlungen durch die Anzahl der Menschen d. h. durch 6 dividirt. Jene Summe gibt nämlich die sämmtliche Ausgabe der Casse für diese sechs Menschen zur Zeit ihres Eintritts in die Gesellschaft, wenn jeder derselben jährlich einen Gulden Leibrente beziehen soll, und eben diese Summe müssen also auch diese sechs Menschen zu derselben Zeit ihres Eintrittes zusammen (also jeder den sechsten Theil dieser Summe) erlegen, wenn weder sie noch die Casse gewinnen oder verlieren soll.

Um das so eben Gesagte in einem kurzen Schema zur bequemeren Uebersicht zusammen zu stellen, so hat man

Alter n	Lebende aus Tafel I A	Factor aus Tafel II	Product
90	.		
91	5	0.9523809	4.7619045
92	4	0.9070295	3.6281180
93	3	0.8638376	2.5915128
94	2	0.8227025	1.6454050
95	1	0.7835262	0.7835262
96	0		
		Summe der Producte	13.4104665

Es ist daher der gesuchte Werth einer jährlichen Leibrente von 1 fl. für einen 90jährigen Mann

$$L = \frac{13.4104665}{6} = 2.2351$$

oder ein 90jähriger Mann muß bey seinem Eintritte in die Gesellschaft 2.2351 fl. entrichten, um dadurch eine jährliche nachträgliche Rente von 1 fl. zu begründen. Eben so würde eine

Rente von 10 fl. durch 22. 351 und eine von 100 fl. durch 223.51 fl. erkauft werden *).

Bey jüngeren Personen wird die Anzahl dieser Producte viel größer und daher die Rechnung beschwerlicher. Allein mit einiger Aufmerksamkeit wird man bemerken, daß die hier zu entwickelnden Producte und selbst die Summen dieser Producte schon in den beyden Columnen D und E der Tafel II enthalten sind, wodurch daher die Berechnung der Lebensrenten ungemein abgekürzt wird. Sucht man nämlich den Werth der Rente von einem Gulden jährlich, oder sucht man die Einlage, welche ein m jähriger Mensch in die Gesellschaft geben muß, um dadurch eine jährliche Lebensrente von einen Gulden zu begründen, so dividire man die Zahl E, die zu m + 1 gehört, durch die Zahl D, die zu m gehört, und der Quotient ist der gesuchte Werth L der Rente von einem Gulden.

So findet man für einen 90jährigen Mann

$$L = \frac{0.16611}{0.07432} = 2.\ 2351 \text{ wie zuvor.}$$

Eben so hat man für einen 30jährigen Menschen

$$L = \frac{1356.02135}{101.57470} = 13.3500 \text{ fl. u. s. w.}$$

Um endlich auch selbst diese kleine Rechnung zu ersparen, gibt die Tafel III die Werthe der Lebensrenten zu einen Gulden jährlich für 3, 4 und 5 pr.C.

Ist nämlich die Größe der Leibrente gegeben, so ist das dafür anzulegende Capital oder der Werth dieser Leibrente gleich der Größe derselben, multiplicirt in die entsprechende Zahl der Tafel III. Und ist das Capital gegeben, so ist die gesuchte Größe der Leibrente gleich dem Capital dividirt durch die entsprechende Zahl der Taf. III.

Ex. I. Ein 40jähriger Mann will eine Leibrente von jährlich 50 fl. kaufen, so ist der Werth derselben oder das dafür anzulegende Capital gleich

$$50\ (11.833) = 591.65 \text{ fl.}$$

Ex. II. Ein 50jähriger Mann will 500 fl. als Capital auf Leibrenten geben, so erhält er dafür jährlich die Leibrente

$$\frac{500}{9.8802} = 50.606 \text{ fl.}$$

Viertes Capitel.

Wittwenrenten.

Eine Wittwenrente, oder wie man sie gewöhnlich nennt, eine Wittwenpension ist von einer Leibrente nur dadurch unterschieden, daß jene erst bey dem Tode des Mannes für seine hinterlassene Wittwe, diese aber schon bey dem Eintritte des Mannes in die Gesellschaft für ihn selbst, jährlich zahlbar wird, so daß beyde Renten bis zu dem Tod der Person dauern, für welche sie eigentlich gekauft worden ist.

Wenn also der Mann seiner Frau eine Leibrente kauft, so wird diese zuerst von dem Tage ihres Eintritts bis an das Ende der Ehe, und dann zweytens auch von dem Tage der Ehetrennung durch den Tod des Mannes bis zu dem Tode der Wittwe selbst dauern. Wenn überdieß derselbe Mann seiner Frau zur Zeit seines Eintritts noch eine andere eben so große jährliche Rente kaufen wollte, die aber nur während der Dauer der Ehe beyder Personen ausgezahlt werden, und bey dem Tode des Mannes erlöschen sollte, so würde er dadurch eine sogenannte Eherente errichten, die von dem Eintritte dieses Paares bis zum Ende ihrer Ehe, oder die nur während der Ehezeit dieses Paares, zahlbar seyn würde.

Kennt man also den Werth L einer Leibrente, die von dem Eintritte bis zu dem Tod der Wittwe dauert, und kennt man eben so den Werth E einer eben so großen Eherente, die von dem Eintritte bis zu dem Tode des Mannes dauert, so darf man nur den zweyten Werth E von dem ersten L subtrahiren, um den Werth einer eben so großen Rente, die von dem Tode des Ma

nes bis zu dem Tode der Wittwe dauert, d. h. also um den Werth W einer eben so großen Wittwenrente zu erhalten.

Da wir nun schon in dem vorhergehenden dritten Capitel die Leibrenten L zu berechnen gelernt haben, so haben wir jetzt nur noch zu sehen, wie man auch die Eherenten E berechnen soll: die Unterschiede L — E der Werthe dieser beyden Renten geben uns dann, wie gesagt, sofort auch den gesuchten Werth W einer Wittwenrente.

Um aber eine Eherente zu berechnen, müssen wir zuvor zwey Fragen zu beantworten wissen. Wenn nämlich eine gewisse Anzahl von Ehepaaren in die Gesellschaft tritt, von welchen z. B. alle Männer 70, und alle Frauen 60 Jahre bey ihrem Eintritte haben, so müssen wir zuerst bestimmen, wie viele von diesen Männern, und eben so, wie viele von diesen Frauen noch nach dem ersten, zweyten, dritten Jahre... am Leben seyn werden.

Da nach der Mortalitätstafel von 1000 zugleich gebornen und jetzt 60jährigen Personen am Ende dieses 60sten Jahres oder bey dem Eintritte derselben in die Gesellschaft, noch 210 Personen am Leben sind, so wollen wir annehmen, daß die oben erwähnte Anzahl der eintretenden Paare ebenfalls gleich 210 sey, eine Anzahl, die übrigens willkührlich, und nur zur Erleichterung der Berechnung, so angenommen worden ist. Daraus folgt nämlich unmittelbar und schon durch die bloße Ansicht der Taf. I, daß von diesen 210 eintretenden 60jährigen Frauen noch leben werden

am Ende des ersten	Jahres	201
zweyten	—	192
dritten	—	182
vierten	—	172 u. s. w.

wodurch daher der erste Theil dieser Frage beantwortet ist.

Um aber auch zu erfahren, wie viele von den 210 eingetretenen 70jährigen Männern nach 1, 2, 3 Jahren noch leben, so hat man durch dieselbe Taf. I folgende einfache Proportionen

von 112 : leben noch 1 Jahr 103 = also von 210 : leben
70jährigen 70jährigen

noch 1 Jahr $\frac{103.210}{112}$

Ferner

von 112: leben noch 2 Jahre 94 = also von 210: leben noch

2 Jahre $\frac{94.210}{112}$

und eben so

von 112: leben noch 3 Jahre 85 = also von 210: leben noch

3 Jahre $\frac{85.210}{112}$

Fährt man so fort, so findet man, daß von den angenommenen 210 Paaren noch leben

	Frauen	Männer
Am Ende des ersten Jahres	201	$\frac{103.210}{112}$
zweyten —	192	$\frac{94.210}{112}$
dritten —	182	$\frac{85.210}{112}$
vierten —	172	$\frac{77.210}{112}$ u.s.w.

wodurch also unsere erste Frage vollständig beantwortet ist.

Allein von diesen 201 am Ende des ersten Jahres lebenden 61jährigen Frauen werden mehrere schon ihre Männer verloren haben und Wittwen geworden seyn, so wie unter den $\frac{103.210}{112}$ am Ende des ersten Jahres noch lebenden 71jährigen Männern auch wohl schon mehrere ihre Frauen verloren haben und Wittwer geworden sind. — Wir aber müssen zur Berechnung der Eheren-

ten, nicht sowohl die in jedem Jahre noch lebenden Frauen und Männer überhaupt, sondern vielmehr die in jedem Jahre noch bestehenden Ehen oder die Anzahl derjenigen Männer kennen, die am Ende eines jeden Jahres ihre Frauen noch besitzen.

Um diese zweyte Frage zu beantworten, werden wir so verfahren. — Die am Ende des ersten Jahres noch lebenden 201 Frauen hatten anfangs, bey ihrem Eintritte in die Gesellschaft, noch alle ihre 201 Männer am Leben. Aber am Ende dieses ersten Jahres, wie viele von diesen 201 Männern werden noch am Leben seyn?

Von 112: leben noch 1 Jahr 103 = also von 201: leben noch 1 Jahr $\frac{103.201}{112}$ und eben so viele, nämlich $\frac{103.201}{112}$ Ehen bestehen also auch noch am Ende des ersten Jahres.

Eben so hatten die am Ende des zweyten Jahres noch lebenden 192 Frauen anfangs alle ihre 192 Männer am Leben: wie viele von diesen Männern werden aber auch nach zwey Jahren noch leben?

Von 112: leben noch 2 Jahre 94 = also von 192: leben noch 2 Jahre $\frac{94.192}{112}$.

Eben so erhält man

von 112: leben noch 3 Jahre 85 = also von 182: leben noch 3 Jahre $\frac{85.182}{112}$.

Setzt man daher diese kleinen Rechnungen fort, so findet man für die Anzahl der noch bestehenden Ehen

am Ende des ersten Jahres $\frac{103.201}{112}$

zweyten — $\frac{94.192}{112}$

dritten — $\frac{85.182}{112}$

am Ende des vierten Jahres $\frac{77.172}{112}$ u. s. w.

Vergleicht man die letzten Zahlen mit den Zahlen A der Mortalitätstafel, so sieht man, wie man sie ohne Mühe auch auf die folgenden Jahre fortsetzen kann*).

Wenn man aber die am Ende eines jeden Jahres noch bestehenden Ehen kennt, so wird es nicht mehr schwer seyn, den Werth E einer Eherente, deren jede mit einem Gulden jährlich bezahlt werden soll, für unsere Ehepaare von dem oben angenommenen Alter von 60 und 70 Jahren zu bestimmen.

Jeder dieser noch bestehenden Ehen soll nämlich die Casse jährlich einen Gulden geben. So gibt sie z. B. am Ende des ersten Jahres an alle dann noch lebenden Paare $\frac{103.201}{112}$ Gulden, am Ende des zweyten Jahres $\frac{94.192}{112}$ Gulden u. s. w. Es entsteht daher die Frage, wie viel alle diese in verschiedenen Zeiten statt gehabten Zahlungen betragen würden, wenn sie sämmtlich am Anfange des ersten Jahres oder bey dem Eintritte aller jener Paare statt gehabt hätten. Denn dieser letzte Betrag ist es eigentlich, den man als die wahre Ausgabe der Casse an alle jene Paare ansehen muß, und diese selbe Summe ist es also auch, welche von den sämmtlichen Paaren bey ihrem Eintritte an die Casse entrichtet werden muß, damit die letzte durch ihre Zahlungen keinen Schaden leide. Allein diese, auf den Anfang aller Jahre zurück discontirte Summe sämmtlicher Zahlungen findet man, wenn man (nach S. 14) die Anzahl der bestehenden Ehen nach dem ersten Jahre durch $\frac{1}{1.05} = 0.9523809$, ferner die Anzahl der nach dem zweyten Jahre bestehenden Ehen durch $\frac{1}{(1.05)^2} = 0.9070295$, die nach drey Jahren durch

Jahre	Bestehende Ehen	Factor aus Tafel II für 5 pCt.		Product	
0	210	—	—	—	—
1	185	0.952	3809	176.190	4665
2	161	0.907	0295	146.031	7495
3	138	0.863	8376	119.209	5888
4	118	0.822	7025	97.078	8950
5	100	0.783	5262	78.352	6200
6	85	0.746	2154	63.428	3090
7	70	0.710	6813	49.747	6910
8	58	0.676	8394	39.256	6852
9	47	0.644	6089	30.296	6183
10	37	0.613	9132	22.714	7884
11	29	0.584	6793	16.955	6997
12	23	0.556	8374	12.807	2602
13	18	0.530	3213	9.545	7834
14	14	0.505	0679	7.070	9506
15	10	0.481	0171	4.810	1710
16	8	0.458	1115	3.664	8920
17	6	0.436	2967	2.617	7802
18	4	0.415	5206	1.662	0824
19	3	0.395	7340	1.187	2020
20	2	0.376	8895	0.753	7790
21	1	0.358	9424	0.358	9423
22	1	0.341	8499	0.341	8499
23	1	0.325	5713	0.325	5713
		Summe		884.409	3757

Dividirt durch 210 . . E = 4.21147 Werth d. Eherente
Aus Taf. III für die 60jähr. Frau L = 7.77140 Werth d. Leibrente
W = L — E = 3.55993 Werth der Wittwenrente, wie in Taf. VI.

Das Vorhergehende enthält die wahre und allein richtige Methode, nach welcher die Wittwenpensionen berechnet werden sollen. Um Abkürzungen und andere Vortheile zu erhalten, lassen sich zwar mehrere Modificationen in der äußeren Form der Methode anbringen, aber die Gründe, auf welche

die ganze Berechnung gebaut ist, und die innere Anordnung der Schlußfolgen, aus denen sie besteht, muß immer dieselbe bleiben und kann nicht geändert werden.

Kennt man aber so den Werth oder das Antrittsgeld W einer Wittwenrente, die jährlich mit 1 Gulden ausgezahlt wird, so lassen sich daraus für dasselbe Paar auch unmittelbar mehrere andere Fragen beantworten.

Welches Antrittsgeld muß z. B. dasselbe Paar erlegen, um dadurch eine Wittwenpension von jährlich 100 fl. zu begründen? — Man erhält dieses Antrittsgeld, wenn man die Zahl W durch die neue Pension (hier 100) multipicirt. Das gesuchte Antrittsgeld wird also seyn 100 $\times$ 3.55993 oder 355.993 fl.

Wie groß wird die jährliche Pension seyn, wenn das Antrittsgeld dieses Paares z. B. 1000 fl. beträgt? — Man erhält diese Pension, wenn man das neue Antrittsgeld (hier 1000) durch die Zahl W dividirt. Die gesuchte jährliche Pension wird also seyn $\frac{1000}{3.55993} = 280.9044$ fl. *)

Ganz eben so wird man auch für die Eherenten verfahren. Welches Antrittsgeld muß z. B. jenes Paar erlegen, um dadurch eine Eherente von jährlich 100 fl. zu begründen? — Man erhält dieses Antrittsgeld, wenn man die Zahl E durch die neue Rente (hier 100) multiplicirt. Das gesuchte Antrittsgeld ist also
100 $\times$ 4.21147 $=$ 421.147 fl.

Wie groß wird umgekehrt die jährliche Eherente seyn, wenn das Antrittsgeld z. B. 1000 fl. beträgt? — Man erhält die neue Eherente, wenn man das Antrittsgeld (hier 1000) durch die

---

*) Ist nämlich W das Antrittsgeld für die jährliche Wittwenpension von 1 Gulden, und W′ das Antrittsgeld für die jährliche Wittwenpension von P Gulden, so hat man für die erste Frage $W' = P.W$, und für die zweyte $P = \frac{W'}{W}$.

Zahl E dividirt. Die gesuchte jährliche Eherente wird also seyn

$$\frac{1000}{4.21147} = 237.4468$$

oder dieses Paar wird sich mit dem Antrittsgelde von 1000 fl. eine jährliche Eherente von 237.4468 fl. kaufen können *).

Noch ist eine Betrachtung übrig, die hier nicht übergangen werden darf. Da nämlich viele Mitglieder, wenn sie in eine Wittwengesellschaft treten, das oben durch die Rechnung bestimmte, und ihnen vielleicht zu große Antrittsgeld entweder nicht gern zahlen wollen oder auch wohl nicht einmal können, so hat man in den meisten Instituten, wie bereits S. 5 erinnert wurde, die Einrichtung getroffen, daß man statt dem Antrittsgelde, welches gleich bey dem Eintritte in die Gesellschaft ganz entrichtet wird, auch jährliche Beyträge entrichten kann, die gewöhnlich bis zu dem Tode des Mannes oder so lange bezahlt werden, als die Ehe dauert. Wir müssen also noch sehen, wie man, statt jenem Antrittsgelde, diese jährlichen Beyträge bestimmen soll, damit jene durch diese vollständig ersetzt werden, d. h. damit die Casse des Instituts durch diese jährlichen Beyträge, wenn sie alle auf die Eintrittszeit des Paares zurück discontirt werden, genau eben so viel erhalte, als sie durch die bey dem Eintritte des Paares gleich baare Bezahlung des ganzen Antrittsgeldes erhalten haben würde.

Zur Auflösung dieser Aufgabe wird uns die letzte der unmittelbar vorhergehenden Fragen helfen. Nach ihr ist die Größe einer jeden Eherente gleich dem Antrittsgelde E'

---

*) Ist nämlich wieder E das Antrittsgeld für eine jährliche Eherente von 1 Gulden, und E' das Antrittsgeld für eine jährliche Eherente von Q Gulden, so ist $E : E' = 1 : Q$ oder

$$E' = QE \text{ also auch } Q = \frac{E'}{E}$$

dividirt durch die Zahl E, wo E das Antrittsgeld für eine Eherente von jährlich 1 Gulden bezeichnet. — Setzt man also in diesem Ausdrucke das Antrittsgeld E′ gleich dem Antrittsgelde W für eine Wittwenpension von jährlich 1 Gulden, (welche letzte Zahl W man schon aus der vorhergehenden Rechnung kennt), so erhält man die Größe der entsprechenden Eherente oder man erhält das, was die Casse durch die Dauer der Ehe jährlich an das Paar zahlen müßte, wenn das Paar in die Casse gleich anfangs die Summe W als Antrittsgeld eingelegt hatte. Und genau eben so viel muß also auch das Paar während der Dauer der Ehe jährlich an die Casse abgeben, damit die Casse dafür die Wittwenrente W auszahlen kann. Es ist daher der jährliche Beytrag, welchen das Paar am Ende eines jeden Jahres durch die ganze Dauer der Ehe zu entrichten hat, gleich der Wittwenrente dividirt durch die Eherente oder gleich der Zahl W dividirt durch die Zahl E. — Sollen aber diese jährlichen Beyträge vorschußweise, also der erste gleich bey dem Eintritte, und die anderen immer im Anfange eines jeden Jahres entrichtet worden, so wird man vor jener Division (wie S. 30) die Zahl E zuerst um die Einheit vermehren, und der gesuchte jährliche Beytrag B wird wieder gleich seyn der Zahl W dividirt durch die um 1 vermehrte Zahl E.

In unserem vorhergehenden Beyspiele, wo der Mann 70 und die Frau 60 Jahre alt ist, hatten wir W = 3.55993 und E = 4.21147; also ist für dieses Paar der jährliche nachträgliche Beytrag

$$B' = \frac{W}{E} = \frac{3.559930}{4.21147} = 0.84529 \text{ fl.}$$

und der jährliche vorschußweise zu zahlende Beytrag

$$B = \frac{W}{E+1} = \frac{3.559930}{5.21147} = 0.68309.$$

Dieses Paar wird also eine jährliche Wittwenpension von

1 fl. kaufen, entweder durch das Antrittsgeld von 3.55993 oder durch den nachträglichen jährlichen Beytrag von B′ = 0.84529, oder endlich durch den vorschüssigen jährlichen Beytrag von B = 0.68309. Eine jährliche Pension von 100 fl. aber wird es erhalten durch das Antrittsgeld von 355.993, oder durch den nachträglichen jährlichen Beytrag von 84.529 oder durch den vorschüssigen jährlichen Beytrag von 68.309 Gulden u. s. w.

Uebrigens ist, um B aus W zu finden, die Kenntniß der Eherente E nicht absolut nothwendig, da nach dem Vorhergehenden $E = L - W$ ist, wo die Lebensrente für das Alter der Frau aus der Tafel III genommen wird. Man hat so

$$B' = \frac{W}{L-W} \text{ und } B = \frac{W}{L+1-W}$$

In unserem Beyspiele ist

$$W = 3.55993 \text{ und } L = 7.7714$$

also

$$B' = \frac{3.55993}{4.21147} = 0.84529$$

und

$$B = \frac{3.55993}{5.21147} = 0.68309$$

wie zuvor.

Man sieht, daß die, übrigens nicht abgekürzte oder genäherte, sondern ganz genaue Berechnung einer Wittwenpension, für jüngere Paare zwar etwas umständlich, aber nie schwer genannt werden kann, da sie auf den einfachsten Operationen der Rechnung beruht, die jedermann bekannt und selbst geläufig seyn sollen. Wer aber mit Logarithmen umgehen kann, wird sich die vielen Multiplicationen mit größeren Zahlen, welche bey diesen Berechnungen vorkommen, und welche eigentlich den einzigen noch etwas beschwerlichen Theil derselben ausmachen, sehr erleichtern, und dabey selbst die Hülfe der Tafel II entbehren können [*]).

Nehmen wir, um dieses noch durch ein Beyspiel zu erläu-

tern, an, daß von dem eintretenden Paare der Mann 50 und die Frau 40 Jahre alt sey.

Nennt man, um die hier vorkommenden Rechnungen auf die einfachste Art darzustellen, der Kürze wegen das Product der Zahlen A der Mortalitäts-Tabelle, die zu 50 und 40 gehören, das nullte Paar; die von 51 und 41 das erste; die von 52 und 42 das zweyte Paar u. s., so daß also

374.300 das 0te Paar ist
367.291 — 1 =
360.282 — 2 =
353.273 — 3 = u. s. w.

Nennt man endlich r den Zinsfuß oder hier die Zahl 1.05, so reduzirt sich das ganze Verfahren auf folgende einfache Operationen:

Man suche das 1ste Paar dividirt durch das	0te Paar und durch	r
2	0	r^2
3	0	r^3
4	0	r^4 u. s.

bis die letzte dieser Zahlen klein genug ist, um ohne Fehler vernachlässiget werden zu können. Dann ist die Summe aller dieser Zahlen gleich dem Werthe E der Eherente. Subtrahirt man aber diese Zahl E von dem durch die Tafel III gegebenen Werth L der Leibrente, so erhält man den gesuchten Werth W der Wittwenpension oder das Antrittsgeld W, welches eine jährliche Wittwenpension von einem Gulden begründet. Endlich ist, wenn bloß auf Contributionsfuß, ohne Antrittsgeld, eingetreten wird, der jährliche nachträgliche oder vorschüssige Beytrag gleich $\frac{W}{E}$ oder gleich $\frac{W}{E+1}$.

Für unser Beyspiel ist

$$\log r = 0.02119 \qquad \log 300 = 2.47712$$

$$\log \tfrac{1}{r} = 9.97881 \qquad \log 374 = 2.57287$$

$$5.04999$$

Comp. Log. 4.95001 des o^{ten} Paares.

$$\left.\begin{array}{l}\log 367 = 2.56467\\ \log 291 = 2.46389\end{array}\right\}\text{ I Paar}$$

$$4.95001 \ldots \text{o Paar}$$

$$\log \tfrac{1}{r} = 9.97881$$

$$9.95738$$

$$\text{Zahl} = 0.90653$$

$$\left.\begin{array}{l}\log 360 = 2.55630\\ \log 282 = 2.45025\end{array}\right\}\text{ II Paar}$$

$$4.95001 \ldots \text{o Paar}$$

$$\log \tfrac{1}{r^2} = 9.95762$$

$$9.91418$$

$$\text{Zahl} = 0.82070 \text{ u. s.}$$

Setzt man alle diese so erhaltenen Zahlen unter einander, so hat man

1	0.90	653
2	0.82	070
3	0.74	195
4	0.66	978
5	0.60	368
6	0.54	318
7	0.48	638
8	0.43	463
9	0.38	752
10	0.34	472
11	0.30	481
12	0.26	871
12	0.23	484
14	0.20	441
15	0.17	710
16	0.15	267
17	0.13	087
18	0.11	146
19	0.09	424
20	0.07	901
21	0.06	623
22	0.05	499
23	0.04	489
24	0.03	660
25	0.02	942
26	0.02	362
27	0.01	864
28	0.01	471
29	0.01	136
30	0.00	855
31	0.00	647
32	0.00	492
33	0.00	363
34	0.00	261
35	0.00	189

Summe 8.02572 . . E

11.83300 . . L

3.80728 . . W . . Antrittsg., wie in T. VI.

0.4744 . . $\frac{W}{E}$ . . jährl. nachträgl. Beytr.

0.4218 . . $\frac{W}{E+1}$. jährl. vorsch. Beytrag.

Man sieht, daß das Verfahren in diesem Beyspiele von dem des vorhergehenden Exempels nur darin verschieden ist, daß man hier die Divisionen durch die Potenzen des Zinsfußes sogleich vornimmt, während man sie dort durch Hülfe der Tafel II berücksichtiget.

Dieses Paar wird also eine jährliche Wittwenpension von 1 Gulden begründen, entweder durch das Antrittsgeld von 3.80728 ohne weitere Beyträge, oder durch den jährlichen nachträglichen Beytrag von 0.4744 ohne Antrittsgeld, oder endlich durch den jährlichen vorschüssigen Beytrag von 0.4218 ohne Antrittsgeld. Für eine Pension von jährlichen 100 fl. aber wäre das Antrittsgeld 380.728, der jährliche nachträgliche Beytrag 47.44 oder endlich der jährliche vorschüssige Beytrag 42.18 fl. Diese Art der Berechnung einer Wittwenpension kann ohne Zweifel durch Hülfstafeln u. dgl. noch beträchtlich erleichtert und abgekürzt werden, wobey wir uns aber hier nicht länger aufhalten wollen. Es wird genügen, die wahren Grundsätze, nach welchen diese Rechnungen geführt werden sollen, entwickelt und ihre Anwendung durch Beyspiele deutlich gemacht zu haben. Wer übrigens das Vorhergehende wohl verstanden hat, wird einsehen, daß aus der Natur dieser Berechnungen selbst mehrere sehr wichtige Bemerkungen hervorgehen, die bisher von den mit diesem Gegenstande Unbekannten nur zu oft übersehen worden sind, und daher hier näher angeführt zu werden verdienen.

Die so berechneten Antrittsgelder oder Beyträge nämlich begründen erstens die Pension, welche die Wittwe von dem Augenblicke des Todes ihres Gatten bis an ihren eigenen Tod ziehen wird, und zwar offenbar auch dann, wenn sie nach dem Tode ihres Mannes wieder mit einem anderen in Ehe treten würde. In einigen Instituten wird diese Pension während der zweyten Ehe der Wittwe nicht, und nur erst wieder nach dem Tode des zweyten Mannes ausgezahlt, ohne Zweifel aus dem Grunde, weil

sie während ihrer zweyten Ehe schon für hinlänglich versorgt
Aber mit demselben Rechte könnte man der Wittwe auch die
ion entziehen, wenn sie ein Loos gewonnen, eine Erbschaft
cht oder einen Schatz gefunden hätte, und ihr erst dann,
sie ihr neues Vermögen durchgebracht hat, die Pension wie-
eben wollen. Allein diese Pension wurde ihr von ihrem
ne für ihre ganze Lebenszeit erkauft, und das Institut,
es den Vertrag auf diese Bedingung mit dem Manne ge-
en hat, ist verbunden, ihn zu halten, die Wittwe mag es
sen oder nicht, da dieses Bedürfniß, zwar allerdings die
lassende Ursache, aber nicht die ausgesprochene Grundbedin-
des Vertrages gewesen ist. Auch läßt sich jenes Vorbehalten
ension während der zweyten und ferneren Ehen der Wittwe
voraus berechnen, da die Zeit und die Dauer dieser Ehen
annt ist, also läßt sich auch vernünftiger Weise darauf bey
Eintritte des Paares und bey der Bestimmung ihrer Pension
Rücksicht nehmen. Daß daraus ein Vortheil für die Casse
ht, kann kein Grund seyn, den eingegangenen Vertrag zu
n oder auch nur ihn während einer gewissen Zeit als ungül-
erklären. — Zweytens ist ebenfalls schon aus der Natur der
gehenden Rechnungen für sich klar, daß es sich hier nicht
um Ehepaare handelt, daß also in einem solchen Institute
bloß der Mann seine ihm angetraute Frau, sondern daß er
seine Schwester, seinen Bruder, seinen Freund und über-
jeden anderen Menschen ganz auf dieselbe Art versorgen
wenn sich nur jedes eintretende Paar denselben Gesetzen
wirft, welche für die Ehepaare gelten. So könnte auch der
sein Kind, oder die Frau ihren Mann, oder irgend ein
er Mensch eine mit einem anderen getraute Frau versorgen,
war in dem letzten Falle entweder auf sein eigenes Leben,
uch auf das Leben des mit dieser Frau getrauten Mannes,
nn die Pension gleichsam so erworben wird, als hätte sie ihr

Mann selbst, mit dem von dem fremden Mann erhaltenen Gelde gekauft. Aus diesem Grunde ist auch die Tafel VI noch auf jüngere Alter fortgeführt, als die der in Ehe tretenden Frauen sind, um dadurch allen Classen von eintretenden Mitgliedern zu genügen. — Drittens muß, wie es sich schon gleichsam von selbst versteht, bey der Bestimmung der Pension nicht nur auf das Alter des Mannes, sondern auch auf das der Frau gehörig Rücksicht genommen werden, weil beyde auf die Größe der Pension gleichmäßig einwirken.

Immer aber und in allen Fällen wird sich viertens die Pension nur auf diejenige Person beziehen, für welche sie in der That gekauft worden ist, eine wesentliche und unerläßliche Bedingung, die allen vorhergehenden Rechnungen, wie man ohne weitere Erläuterung sieht, nothwendig zu Grunde liegt und liegen muß, und ohne welche endlich diese Rechnungen selbst alle Bedeutung verlieren, und sich gänzlich aufheben würden. Die Pension, so wie die Leibrente, ist nur für diese individuelle Person bestimmt, für welche sie gekauft wird, und diese Person kann durch keine andere ersetzt oder vertreten werden. Man kann wohl die Beziehung seiner Rente an eine andere Person übertragen, so wie es Jedem frey steht, das in jedem Jahre von der Casse erhaltene Geld an irgend einen anderen zu verschenken: aber dieser Uebertrag kann nur Statt haben, so lange die Person, für welche die Rente gekauft wurde, noch selbst am Leben ist, da mit dem Tode derselben der mit der Casse für sie und für sie allein eingegangene Vertrag, und daher auch die nur für sie bestimmte Auszählung der Pension vollständig erlischt. Diese letzte Bemerkung besonders ist in der neueren Zeit von so vielen Gründern dieser Institute übersehen oder vernachlässiget, und dadurch der Keim zu dem unvermeidlichen Untergange derselben, und zu dem Unglücke so vieler der edelsten und dürftigsten Familien des Landes gelegt worden. Hätten diese sogenannten Gründer von

Wittwenanstalten, statt ihren heillosen beyläufigen Ueberschlägen, ihren ungegründeten Projecten und ihren eben so ungeschickten als ungerechten Experimenten mit fremden Gelde der Wittwen und Waisen, hätten sie sich, ehe sie an ihr Werk gingen, zu unterrichten, auch nur über die ersten Elemente dieses ihres Werkes zu unterrichten gesucht, so würden sie gesehen haben, daß Einfälle dieser Art, wie die Uebertragung der Pensionen auf andere, mit der ganzen Natur der Unternehmung, mit der Vernunft und mit der Ausführung in directem Widerspruche sind, und auf keinen Fall zugelassen werden können, und daß daher ihre Aufnahme nichts, als ein vollständiger Beweis der völligen Unbekanntschaft mit den ersten Principien ist, nach welchen jede gute Wittwenanstalt eingerichtet werden soll. Wo immer so offenbare Fehler, wie z. B. die Substitution anderer Personen, die Bewilligung der zweyten und ferneren Ehen, die Nichtbeachtung des Alters der Frauen bey dem Eintritte der Ehepaare, die Ausdehnung der Wittwenpensionen auf die nach dem Tode der Mutter zurückbleibenden Kinder u. dgl. wo solche Fehler Statt haben, da kann von einer Bestimmung der Pensionen durch Rechnung, also auch von einer Prüfung des Instituts durch Rechnung, weiter keine Rede mehr seyn, und solche, schon an sich verwerfliche Anstalten, sind bereits in ihrer ersten Grundlage, sind bereits von Geburt aus fehlerhaft, und würden daher viel Unglück erspart haben, wenn sie ganz ungeboren geblieben wären.

Fünftes Capitel.

Prüfung der Wittwen-Institute in Beziehung auf die ihnen zu Grunde liegende Berechnung.

Nachdem wir nun gesehen haben, wie man die Wittwenpensionen genau berechnen soll, so wird es nicht mehr schwer seyn, zu untersuchen, ob diese Pensionen auch in der That bey irgend einem schon bestehenden Institute richtig berechnet worden sind. Da diese Prüfung für das Institut selbst, und für alle, welche daran Theil nehmen wollen, von der größten Wichtigkeit ist, so werde ich mich bemühen, das hier zu beobachtende Verfahren so deutlich als möglich auseinander zu setzen, und zugleich so einfach zu machen, daß jeder, der nur eben mit den ersten Operationen der Rechenkunst bekannt ist, diese Prüfung selbst ohne Mühe und in einigen Minuten vorzunehmen im Stande seyn soll.

Das Natürlichste wäre wohl, einige Paare von verschiedenen Altersklassen herauszunehmen, und für sie nach den Vorschriften des vorhergehenden Capitels die Größe derjenigen Pensionen zu berechnen, welche für diese Paare durch die in dem Institute eingeführten Antrittsgelder und jährlichen Beyträge begründet werden. Vergleicht man dann diese berechneten Pensionen mit den von dem Institute versprochenen, so sieht man sofort, ob und wie viel die letzten zu klein oder zu groß sind, und welcher Schaden daher in dem ersten Falle für die Mitglieder, und im zweyten für die Casse daraus entstehen muß; also auch, ob das Institut sich für die Folge mit Sicherheit erhalten oder vor

der Zeit zu Grunde gehen wird, und endlich, ob es rathsamer sey, demselben als ein contribuirendes Mitglied beyzutreten, oder aber von übel angelegten Speculationen fern zu bleiben.

Allein diese Berechnungen für eine größere Anzahl von Paaren wird für die meisten Leser eine nicht wenig beschwerliche Sache seyn, und daher die so wünschenswerthe und selbst nothwendige Prüfung oft weit hinaus setzen und vielleicht gänzlich hindern.

Man könnte sich aber die Mühe so vieler Berechnungen abkürzen, wenn man bloß im Allgemeinen, was in den meisten Fällen hinreichend seyn wird, über den Bestand der Gesellschaft ein Urtheil sucht. Zu diesem Zwecke wäre es genug, allen Mitgliedern des Instituts im Durchschnitte ein sogenanntes mittleres Alter beyzulegen, welches nämlich von den jüngsten und den ältesten der eintretenden Paare nahe gleich weit entfernt ist. Man kann annehmen, daß die Männer im Allgemeinen zwischen ihrem 30sten und 58sten Jahre in solche Gesellschaften eintreten, daß also das mittlere Alter der eintretenden Männer nahe 44, und da die Frauen nach den darüber gesammelten Erfahrungen im Durchschnitte 8 Jahre jünger sind, daß das mittlere Alter der Frauen nahe 36 sey. Sucht man aber das Antrittsgeld a, oder den jährlichen vorschüssigen Beytrag b, welcher für dieses Normalpaar, wo der Mann 44 und die Frau 36 Jahre bey dem Eintritte hat, eine jährliche Pension von einem Gulden begründet, so findet man nach den im IV. Capitel erklärten Rechnungen

Antrittsgeld . . . $a = 3.45$
jährlicher Betrag . . $b = 0.366$

und diese Werthe setzen voraus, daß die Gesellschaft ihre Capitalien zu 5 prCt. mit Sicherheit ausleiht. Da aber mehrere Institute die Einkünfte ihrer Cassen nur zu 4, und selbst einige bloß zu 3 prCt. ausleihen, so wird es nothwendig, dieselben Rechnungen für jenes Normalpaar auch auf den Zinsfuß von 1.04 und 1.03 auszudehnen. Man erhält so

Alter des Mannes 44
Alter der Frau 36

	5 pCt.	4 pCt.	3 pCt.
a . .	3.45	4.16	5.09
b . .	0.366	0.397	0.436

Diese wenigen Zahlen setzen uns bereits in den Stand, die Haltbarkeit eines Instituts im Allgemeinen zu beurtheilen. Welches nämlich auch die öffentlichen Versprechungen und die geheimgehaltenen Reserven seyn mögen, mit denen die Gründer einer solchen Anstalt entweder ihre Committenten oder sich selbst hinzuhalten wünschen mögen, immer müssen sie, wenn anders ihre Gesellschaft ins Leben treten soll, wenigstens das Antrittsgeld oder den jährlichen Beytrag, d. h. also mit einem Worte, die Einlage, welche sie fordern, und die Pension, welche sie dafür geben wollen, der Wahrheit gemäß öffentlich bekannt machen, und diese zwey, bey jeder Anstalt dieser Art unerläßlichen und gewiß genau bekannten Angaben reichen schon hin, sich zu überzeugen, ob die Anstalt selbst auf eine richtige Berechnung gegründet sey, und daher auch für die Zukunft einer gesicherten Existenz sich erfreuen könne.

Dividirt man nämlich für ein Paar, wo der Mann 44 und die Frau bey ihrem Eintritte 36 Jahre hat, das Antrittsgeld, welches die Anstalt fordert, durch die Zahl a, und den jährlichen Beytrag, welchen die Anstalt fordert, durch die Zahl b der vorhergehenden kleinen Tafel, so gibt die Summe dieser beyden Quotienten, die wir der Kürze wegen durch I und II bezeichnen wollen, sogleich die wahre jährliche Wittwenpension P, welche durch diese Einlagen nach den Rechnungen des vorhergehenden Capitels, begründet wird. Subtrahirt man diese wahre Pension P von der Pension p, welche die Anstalt versprochen hat, so gibt die Differenz den Schaden, welche die Anstalt von diesem Paare während jedem Jahre der Dauer dieser Pension hat,

vorausgesetzt, daß p größer als P ist. Ist aber p kleiner als P, so ist die Pension des Instituts für dieses Paar um die Differenz P — p zu klein, oder diese Differenz gibt den Schaden, welchen dieses Paar von der Anstalt in jedem Jahre der Dauer dieser Pension leiden muß. Da aber dieses Paar, wie oben vorausgesetzt wurde, ein sogenanntes mittleres Paar ist, so kann auch jene Differenz der Größen P und p im Allgemeinen als der mittlere Schaden betrachtet werden, welchen das Institut bey jeder seiner Wittwen in jedem Jahre während der Dauer dieser Wittwenschaft hat. *)

Es wird nicht überflüssig seyn, diese Rechnungen durch einige Beyspiele zu erläutern, in welchen allen der Zinsfuß gleich 1.05 vorausgesetzt wurde.

I. Nehmen wir zuerst an, daß man in ein Institut nur auf Capitalfuß eintreten könne, und daß ein mittleres Paar (wo der Mann 44 und die Frau 36 Jahre alt ist) mit dem Antritts-

---

*) Tritt man nämlich in das Institut bloß auf Capitalfuß durch das Antrittsgeld A ein, so erhält man die dadurch begründete jährliche Wittwenpension x durch

$$a:1 = A:x, \text{ also } x = \frac{A}{a}.$$

Tritt man aber bloß auf Contributionsfuß durch den jährlichen Beytrag B ein, so erhält man die jährliche Wittwenpension x′ durch

$$b:1 = B:x', \text{ also } x' = \frac{B}{b}.$$

Tritt man daher auf beyde Arten zugleich ein, oder ist für das gegebene mittlere Paar das Antrittsgeld A und der jährliche Beytrag B, so ist die, durch beyde Einlagen begründete Wittwenpension P = x + x′, also auch

$$P = \frac{A}{a} + \frac{B}{b}$$

wie im Texte. Ist dann p die Pension des Instituts, so ist p — P der gesuchte Schaden des Instituts, oder wenn diese Differenz negativ ist, der jährliche Schaden des Paars während der Dauer der Wittwenschaft.

gelde von 1000 fl. eine jährliche Wittwenpension von 300 fl. erhalten soll. — Da hier der jährliche Beytrag Null ist, so ist auch der Quotient II gleich Null, und man hat daher bloß

$I = \frac{1000}{3.45} = 289$, wenn man hier und in dem Folgenden die Theile von Gulden der Kürze wegen wegläßt, d. h. also, es beträgt die wahre berechnete jährliche Pension P = 289 Gulden die versprochene Pension des Instituts ist aber p = 300 also der jährliche Schaden des Instituts = 11 fl.

Wenn dieses Institut ihre Gelder zu 4 pCt. ausleihen möchte, so hätte man $P = \frac{1000}{4.16} = 240$
also der Schaden des Institus
$p - P = 300 - 240 = 60$ Gulden.

Wenn es endlich seine Capitalien zu 3 pCt. ausleiht, so ist
$P = \frac{1000}{5.09} = 196$ und der Schaden des Instituts
$p - P = 300 - 196 = 104$ Gulden.

II. In ein anderes Institut trete man bloß auf Contributionsfuß ein, und ein mittlers Paar erhalte für den jährlichen Beytrag von 100 fl. eine jährliche Wittwenpension von 300 fl. — Da hier das Antrittsgeld, also auch der Quotient I gleich Null ist, so hat man für 5 pCt. bloß $II = \frac{100}{0.366} = 273$ also die wahre Pension P = 273 und daher der jährliche Schaden des Instituts im Mittel bey jedem Paare p — P = 27 fl.

III. In einem dritten Institute kann man auf Capital- und Contributionsfuß zugeich eintreten, und unser mittleres Paar soll für das Antrittsgeld von 620 fl. und zugleich für den jährlichen Beytrag von 16 fl. eine jährliche Wittwenpension von 300 erhalten. —

Hier ist der Quotient $I = \frac{620}{3.45} = 179$

$$II = \frac{16}{0.366} = 44$$

Summe $P = I + II = 223$

Da aber die von dem Institute versprochene Pension $p = 300$ ist, so ist der jährliche Schaden des Instituts $p - P = 77$ Gulden.

IV. Wäre das Antrittsgeld 312 fl. und der jährliche Beytrag 15 fl. und die dafür verheißene Pension $p = 300$ fl., so hätte man

$$\begin{aligned} I &= 90 \\ II &= 41 \\ P &= 131 \\ p &= 300 \end{aligned}$$

Schaden des Instituts 169

V. Wäre das Antrittsgeld 202 und der jährliche Beytrag 14 und die verheißene Pension 300 Gulden, so hätte man

$$\begin{aligned} I &= 58 \\ II &= 39 \\ P &= 97 \\ p &= 300 \end{aligned}$$

Schaden des Instituts 203

VI. Wäre endlich das Antrittsgeld 548, der jährliche Beytrag 32, und die verheißene Pension 600 Gulden, so hätte man

$I = 159$

$II = 90$

$P = 249$ wahre, berechnete Pension

$p = 600$ Institutspension

351 Schaden des Instituts.

Es wird nicht überflüssig seyn, von diesen obgleich sehr leichten Rechnungen so viele Beyspiele angeführt zu sehen, da sie, wie der Kenner dieser Institute bemerken wird, nicht so ganz auf

Geradewohl gewählt worden sind, und leider eine sehr wohl constatirte historische Unterlage haben. In dem zuletzt betrachteten Falle wird also jede Wittwe in jedem Jahre, die sie mit ihrer Pension dem Institute zur Last fällt, demselben einen Verlust von 351 Gulden verursachen; in zehn Jahren wird diese Wittwe ohne Interessen 3510 Gulden zu viel gekostet haben, und 100 solcher Wittwen werden in zehn Jahren dem Institute einen Schaden von 351,000 Gulden bringen, der daher in 30 Jahren schon eine Million übersteigt. Wie aber ein solches Institut, wenn es in der That existirt, gegründet werden und wie der Gründer desselben auch jetzt noch an eine fernere gesicherte Dauer desselben glauben, und sogar noch mit blühenden Aussichten für die Zukunft prahlen könnte, muß ich anderen zu enträthseln überlassen.

Man wird übrigens von selbst bemerken, daß dieselben Berechnungen auch noch zur Beantwortung mancher anderer wichtiger Fragen Gelegenheit geben. Gesetzt man wäre nun endlich zu der Ueberzeugung gekommen, daß die angeführten Institute mit ihren Einrichtungen nicht bestehen könnten und daher abgeändert werden müssen. Wollte man, was wohl das gerathenste seyn möchte, das bisher bestimmte Antrittsgeld und den jährlichen Beytrag ungeändert lassen, aber dafür die Pensionen auf ihre wahre Größe, die allein die Casse verbürgen kann, zurückführen, so geben die vorhergehenden Rechnungen schon unmittelbar die neuen Pensionen P an, die man an der Stelle der alten p einführen muß. So wird man in dem letztgenannten Institute die jährlichen Wittwenpensionen, die früher 600 fl. betragen haben, auf 249 fl. reduziren müssen.

Wollte man aber, um von den einmal festgesetzten Statuten der Anstalt in Beziehung auf die Größe der Pensionen nicht abzuweichen, diese alten Pensionen ungeändert beybehalten, so wird man entweder die neuen jährlichen Beyträge, oder die neuen Antrittsgelder dahin bestimmen müssen, daß durch sie jene

fangs- zu groß angesetzten Pensionen vollkommen gedeckt wer-
l. Will man z. B. die Beyträge ändern, aber die alten An-
ttsgelder, so wie die alten Pensionen unverändert beybehalten,
wird man die neuen jährlichen Beyträge erhalten, wenn man
Quotienten I von der alten Pension subtrahirt, und den Rest
rch die Zahl b der vorhergehenden Tafel multiplicirt. In unse-
n letzten Beyspiele ist p = 600, I = 159, also der neue
rliche Beytrag gleich (600 — 159) 0.356 = 157 Gulden.
enn also die alten Pensionen und die alten Antrittsgelder blei-
sollen, so müssen die alten jährlichen Beyträge von 32 auf
7 erhöht, also beynahe fünfmal größer genommen werden.

Will man aber bloß das Antrittsgeld ändern oder Nach-
lungen einführen, so wird man das neue Antrittsgeld des
tleren Paares finden, wenn man den Quotienten II von der
en Pension subtrahirt, und den Rest durch die Zahl a der Ta-
multiplicirt. So ist in demselben Beyspiele p = 600,
= 90, und daher das neue Antrittsgeld (600 — 90) 3.46
1765, oder wenn man die Pensionen und die jährlichen Bey-
ge ungeändert lassen will, so wird man das frühere Antritts-
von 548 auf 1765 erhöhen, also mehr als dreymal, ge-
ter $\frac{16}{5}$mal größer nehmen müssen, und so fort in ähnlichen
len.

Die vorhergehenden Rechnungen betreffen bloß das ange-
nmene Normalpaar, wo der Mann 44 und die Frau 36
hre bey ihrem Eintritte in die Gesellschaft zählt. Allein es
d wünschenswerth seyn, diese Berechnungen auf dieselbe sehr
fache Art auch auf andere Paare von verschiedenen Alters-
sen fortzuführen, um den Gewinn oder den Schaden des
stitutes auch bey mehreren einzelnen Classen, nicht bloß
Mittel aus allen, kennen zu lernen. Bey der Gründun

eines neuen Institutes ist diese Kenntniß für alle Paare, also auch die Berechnung aller Altersclassen nach den Vorschriften des Cap. IV sogar nothwendig und unentbehrlich.

Zu diesem Zwecke sind daher in den Tafeln IV, V und VI die Antrittsgelder a und die jährlichen Beyträge b für verschiedene Alter des Mannes und der Frau zusammengestellt worden. Die erste Zahl jedes Quadrats dieser Tafeln ist das Antrittsgeld a, und die zweyte, unter jener stehende, der jährliche Beytrag b. Die Taf. IV setzt den Zinsfuß 1.03, V aber 1.04 und VI endlich 1.05 voraus. Alle drey sind auf die in Tafel I gegebene Mortalitäts-Tabelle von Süßmilch-Baumann gegründet. Die Tafel IV wurde aus der „Revidirten Anordnung der 1778 in Hamburg errichteten allgemeinen Versorgungsanstalt. Hamburg bey Schniebes 1805“ genommen; die Tafeln V und VI aber sind die in der Einleitung erwähnten, von Herrn Regierungsrath von Weber mit großer Sorgfalt berechneten, und mir zur Bekanntmachung freundschaftlich mitgetheilten Tabellen. Die jährliche Pension, welche durch das Antrittsgeld a (ohne weitere Beyträge), oder auch durch deu jährlichen Beytrag b (ohne Antrittsgeld) begründet wird, beträgt einen Gulden (also auch 10 Gulden, wenn man die Zahlen a oder b durch 10 multiplicirt, oder 100 Gulden, wenn man die Zahlen a oder b durch 100 multiplicirt u. s. f.). Uebrigens wird vorausgesetzt, daß der jährliche Beytrag vorschußweise (also der erste gleich bey dem Eintritte), erlegt werde, und durch die ganze Zeit der Ehe dauere, bey dem Tode des Mannes aber aufhöre; ferner, daß die Auszahlung der Pension mit dem Tode der Wittwe aufhöre, und auf keine andere übergehe; daß diese Wittwe die Pension, auch wenn sie wieder heirathet, ununterbrochen bis an das Ende ihres Lebens erhalte, und daß endlich das Antrittsgeld sowohl als der jährliche Beytrag in keinem Falle von dem Institute wieder zurück gegeben werde.

Man findet in den beyden letzten Tafeln V und VI den
rlichen Beytrag b aus dem gegebenen Antrittsgelde a, und
s der Leibrente L für das Alter der Frau (Taf. III) durch
ı Ausdruck

$$b = \frac{a}{L - a + 0.75}$$

So ist z. B. wenn der Mann 50 und die Frau 40 Jahre
t, nach Taf. VI, a = 3.803, und nach Taf. III, L = 11.833,
o ist auch

$$b = \frac{3.803}{8.780} = 0.433$$

e in Taf. VI (Vergl. S. 48). Man sieht aus diesem Aus-
ucke, daß die Hälfte dieser Zahlen b in Taf. V und VI eigent-
). den halbjährigen, vorschußweise zu zahlenden Beytrag während
r Dauer der Ehe bedeuten.

Da in diesen Tabellen die Altersjahre des Mannes sowohl,
s die der Frau von fünf zu fünf Jahren fortschreiten, so ist
leicht, diese Tafeln, wenn es nöthig ist, auch auf die einzelnen
ıhre auszudehnen.

Um auch dieses durch ein Beyspiel deutlich zu machen, wol-
ı wir die Tafel VI zwischen dem Alter des Mannes von 40 bis
, und der Frau von 35 bis 40 auf die einzelnen Jahre beyder
)eile fortführen. Nennt man die vier hiehergehörenden Zahlen
r Tafel

	A = 3.088	B = 2.683
	C = 3.653	D = 3.194
Differenz	0.565	0.511
⅕ Differenz	0.113	0.1022

wird man nur die zwey letzten Zahlen viermal zu A und B
)diren, um die zwey äußersten senkrechten Columnen unserer
rgänzung zu finden, nämlich

3.088	. .	2.683 wovon wieder ⅕ Differenz	0.0810
3.201	. .	2.785	0.832
3.314	. .	2.887	0.854
3.427	. .	2.990	0.874
3.540	. .	3.092	0.896
3.653	. .	3.194	0.918

und diese letzten senkrechten Zahlen wird man wieder viermal zu den ersten senkrechten Zahlen addiren (oder hier, da die Hauptzahlen abnehmen, subtrahiren), um auch die sechs übrigen Zwischencolumnen unserer Ergänzung zu finden, nämlich

3.088	3.201	3.314
3.007	3.118	3.229
2.926	3.035	3.143
2.845	2.951	3.058
2.764	2.868	2.972
2.683	2.785	2.887 u. s. w.

wodurch man daher die folgende vollständige Ergänzung dieses Theils der Tafel erhält

Frau

Mann	35	36	37	38	39	40
40	3.088	3.007	2.926	2.845	2.764	2.683
41	3.201	3.118	3.035	2.951	2.868	2.785
42	3.314	3.229	3.143	3.058	2.972	2.887
43	3.427	3.340	3.252	3.165	3.077	2.990
44	3.540	3.450	3.361	3.271	3.182	3.092
45	3.653	3.561	3.469	3.378	3.286	3.194

und eben so wird man auch mit allen übrigen Theilen der Tafeln IV, V und VI verfahren.

Der Gebrauch dieser Tafeln zur Prüfung der Anstalten ist übrigens ganz derselbe, wie oben für das mittlere Paar gezeigt worden ist, nur muß hier die, jedem bestimmten Paare entsprechende Zahl a und b genommen werden *).

Nehmen wir, um dieses auf einen besondern Fall anzuwenden, das fünfte der vorhergehenden Beyspiele wieder vor, und setzen wir voraus, daß in diesem Institute folgende Einrichtung getroffen sey, daß jedes Mitglied bey seinem Eintritte 20 fl. und überdieß sogleich so vielmal 14 fl. zahle, als er Jahre über 30 habe, und daß endlich noch jedes Jahr vorschußweise der jährliche Beytrag von 14 fl. entrichtet werde, wofür dann eine jährliche Pension von 300 fl. gegeben werden soll. Wenn keine weiteren Bestimmungen über das Alter der Frau u. dgl. festgesetzt sind, so ist für ein eintretendes Mitglied

des Alters	30 . .	45 . .	60 . .	70
das Antrittsgeld	34 . .	244 . .	454 . .	594 u. f.

und der jährliche Beytrag ist bey allen gleich 14 Gulden. Sind die Frauen dieser Männer bey ihrem Eintritte in derselben Ordnung 20, 30, 40 und 50 Jahre alt, so gibt die Tafel VI für diese vier Paare folgende Resultate, wenn die so eben angeführten Antrittsgelder des Instituts durch A, und die jährlichen Beyträge durch B bezeichnet werden,

*) Ist nämlich wieder A das Antrittsgeld und B der jährliche Beytrag, für welche das Institut die jährliche Pension p gibt, so ist die wahre Pension $P = \frac{A}{a} + \frac{B}{b}$ und der Schaden des Instituts gleich p — P.

Mann	Frau	a b	A B	I II	Wahre Pension P=I+II	Schaden des Instituts
30	20	3.24 0.267	34 14	10 52	62	238
45	30	4.12 0.412	244 14	59 34	93	207
60	40	5.20 0.705	454 14	87 20	107	193
70	50	5.19 0.953	594 14	114 15	129	171

Man sieht daraus zugleich, daß es keinesweges überflüssig, sondern im Gegentheile höchst nothwendig ist, bey der Gründung eines neuen Institutes oder bey der Bestimmung der Pensionen, (nicht bloß, wie es bisher nur zu oft schon geschehen ist, auf das Alter des eintretenden Mannes, sondern auch) auf das Alter seiner Frau Rücksicht zu nehmen, da das eine, so wie das andere, auf die Größe der Pension, oder was dasselbe ist, auf die Größe der Einlagen einen gleich wesentlichen Einfluß haben, und daß ohne diese doppelte Rücksicht jede wahre Berechnung einer Wittwenanstalt eigentlich ganz unmöglich ist, wie auch schon aus den S. 54 mitgetheilten Bemerkungen unmittelbar folgt. Dasselbe zeigen die drey letzten Tafeln gleichsam auf den ersten Blick. Nehmen wir z. B. an, daß in ein Institut nur auf Capitalfuß zu 5 pr.C. eingetreten werde, und daß die jährliche Pension 500 fl. betrage, so wird ein Mann von 45 Jahren mit einer Frau

von 75 Jahren das Antrittsgeld . . 286 fl.
45 1371
15 . . . . 2692 u. f.

erlegen müssen. Wäre aber in dieser Anstalt das Antrittsgeld für alle Männer von 45 Jahre, ohne Rücksicht auf das Alter ihrer Frauen, z. B. gleich 1000 fl. festgesetzt worden, so können dann die Pensionen der Wittwen dieser Männer nicht mehr gleich seyn,

sondern sie werden desto kleiner werden, je jünger die Frauen bey ihrem Eintritte waren. So erhält man nach Taf. VI für einen Mann von 45 Jahren mit einer Frau

von 15 Jahre die Pension	186 fl.
45	370
75	1746 u. f.

Man sieht daraus, daß es thöricht ist und eine völlige Unbekanntschaft mit den ersten Principien dieser Rechnungen verräth, wenn man allen Männern von gleichem Alter, ohne Rücksicht auf ihre Frauen, gleiche Einlagen abfordern, und dafür auch gleiche Pensionen zuerkennen wollte, wie dieses doch in so vielen unserer Institute geschehen soll.

Wenn also ein Institut von allen seinen Mitgliedern desselben Alters ohne Unterschied für dieselben Pensionen gleichviel verlangt, da es doch, nach der Berechnung, wie wir so eben gesehen haben, von manchen fünf und selbst zehnmal mehr, als von den anderen, verlangen soll, so kann man schon im Voraus überzeugt seyn, daß bey der Gründung desselben nicht nur schlecht, sondern daß eigentlich gar nicht gerechnet, und alles nur nach den sogenannten Ueberschlägen auf Geradewohl zusammengestellt worden ist; daß also auch von einer wahren innern Organisation der Anstalt und von einer gesicherten Dauer für die Zukunft weiter keine Rede mehr seyn kann.

Gehen wir eben so noch einige besondere Fälle der in den vorhergehenden sechsten Beyspiele (S. 61) erwähnten Anstalt durch. In derselben entrichtet jedes Mitglied bey seinem Eintritte 40 Gulden und den vorschüssigen jährlichen Beytrag von 32 Gulden. Endlich wird noch jedes Jahr, welches der Eintretende über 30 zählt, durch 32 fl. Beytrag und 2 fl. Interessenvergütung, also durch 34 fl. abgelöst. In dieser Anstalt gibt also ein eintretendes Mitglied

des Alters 30 . . . . 55 80
das Antrittsgeld 72 . . . . 922 . . . . 1772 *)
der jährliche Beytrag aber ist bey allen 32 fl. und die dafür zugesagte jährliche Pension endlich 600 fl. Mit diesen Angaben sind die Resultate der Rechnung folgende:

Mann	Frau	a b	A B	I II	Wahre Pension P=I+II	Schaden des Instituts.
30	15	3.55 0.285	72 32	20 112	132	468
30	60	0.84 0.109	72 32	86 94	380	220
55	15	7.02 0.785	922 32	131 41	172	428
55	65	1.54 0.263	922 32	599 122	721	— 121
80	15	11.37 2.45	1772 32	156 13	169	431
80	70	2.891 0.82	1772 32	613 39	752	— 152

Die zwey mit — bezeichneten Zahlen der letzten Columne zeigen an, daß die Pensionen des Instituts zu 600 fl. für jene Paare um 121 und 152 zu klein sind, während sie für die anderen Paare um 468, 220 u. s. zu groß sind. So wenig ist also in diesem Institute gerechnet worden, daß die älteren Frauen der schon betagten Männer zu wenig, und im Gegentheile die alten

*) Ist überhaupt m das Alter des Mannes bey seinem Eintritte, so ist für diese Anstalt das Antrittsgeld gleich 34 m — 948.

und jungen Frauen der noch jüngeren Männer durchaus viel zu viel erhalten. Zugleich zeigt die letzte Tafel sehr auffallend, wie sehr die Größe der Pension von dem Alter der Frau, die in jenem Institute eigentlich ganz unberücksichtiget bleibt, abhängig ist. So würde ein 80jähriger Mann mit einer Frau von 70 Jahren volle 583 fl. jährlicher Pension mehr erhalten müssen, als derselbe Mann mit einer 15jährigen Frau zu fordern hat, während das Institut, solche Kleinigkeiten nicht achtend, jedem ohne Unterschied 600 fl. gibt, und dabey die Sorgfalt rühmt, welche es auf die sogenannte Gleichstellung seiner Mitglieder verwendet hat. Wir haben auch bereits oben (S. 62) gefunden, daß diese Anstalt mit ihrer äußerst unvollkommenen Einrichtung bey jeder seiner Wittwen im Mittel einen jährlichen Schaden von 351 Gulden hat. Daß aber bey so großen und so oft wiederholten Verlusten die Anstalt ihrem Untergange mit schnellen Schritten entgegen eilen müsse, ist für sich klar.

Es würde übrigens, nach dem Vorhergehenden, nicht schwer seyn, die Abänderungen zu bestimmen und die Einrichtungen anzugeben, durch welche allein dieses oder jedes andere Institut, dessen frühere Berechnung fehlerhaft ist, gerettet werden kann, Wir werden weiter unten wieder auf diesen Gegenstand zurückkommen, und wollen daher hier bloß bemerken, daß im Allgemeinen zwey von den drey Elementen, Antrittsgeld, jährlicher Beytrag und Pension, unverändert bleiben können, während das dritte neu berechnet werden muß. Will das Institut z. B. seine bisherigen Antrittsgelder A und jährlichen Beylagen B unverändert beybehalten, so muß es seine Pensionen ändern, und die wahren Pensionen P findet man durch die oben (S. 59) erwähnte Gleichung

$$P = \frac{A}{a} + \frac{B}{b}$$

von a und b die Zahlen der Tafel IV, V oder VI sind, die je

dem gegebenen Ehepaare entsprechen. Will es aber seine bisherigen Pensionen und jährlichen Beyträge beybehalten, so werden die neuen Antrittsgelder durch die Gleichung gegeben

$$A = \left(P - \frac{B}{b}\right) a.$$

Will es endlich die alten Pensionen und die Antrittsgelder beybehalten, so müssen die jährlichen Beyträge geändert werden, und der verbesserte jährliche Beytrag wird seyn

$$B = \left(P - \frac{A}{a}\right) b.$$

Wenden wir dieß z. B. auf ein Paar an, von welchem der Mann bey seinem Eintritte 40 und die Frau 20 Jahre hatte. Für dieses Paar ist nach Taf. VI $a = 4.28$ und $b = 0.385$. Das bisherige Antrittsgeld des Instituts für dieses Paar aber ist $A = 412$ fl. und der jährliche Beytrag $B = 32$ fl.

Läßt man also die alten Antrittsgelder und Beyträge, wie sie die Statuten der Anstalt enthalten, unverändert, so muß die Pension geändert werden, und man findet, nach der ersten der drey vorhergehenden Gleichungen, die wahre Pension, welche die Anstalt diesem Paare zu geben im Stande ist,

$$P = \frac{412}{4.28} + \frac{32}{0.385} = 96.26 + 83.11 = 179.37$$

also nur $179\frac{37}{100}$ fl., und nicht 600 fl. wie bisher.

Läßt man aber die Pensionen und die jährlichen Beyträge ungeändert, so muß das Antrittsgeld geändert werden, wenn die Gesellschaft bestehen soll, und das wahre neue Antrittsgeld wird, nach der zweyten der vorhergehenden Gleichungen seyn,

$$A = (600 - 83.11)\ 4.28 = 2212.29$$

also $2212\frac{29}{100}$ fl. und nicht 412 fl. wie bisher.

Läßt man endlich die alten Pensionen und Antrittsgelder verändert, so müssen die jährlichen Beyträge geändert werden,

und der verbesserte jährliche Beytrag wird, nach der dritten der vorhergehenden Gleichungen, seyn

$$B = (600 - 96.26)\ 0.385 = 193.94$$

also $193\frac{94}{100}$ fl. und nicht 32 fl. wie bisher.

Eine von diesen drey Aenderungen muß also sogleich vorgenommen werden, sobald man entdeckt, daß die früheren Berechnungen des Instituts fehlerhaft sind, vorausgesetzt, daß diese Entdeckung früh genug gemacht und der Schaden, der durch jene fehlerhafte Einrichtung entsteht, in den ersten Jahren der Gesellschaft noch keine bedeutenden Folgen nach sich gezogen habe. Wie man zu verfahren habe, wenn dieses nicht der Fall ist, werden wir weiter unten sehen.

Zum Schlusse dieses Gegenstandes wollen wir noch bemerken, daß die Tafeln IV, V und VI noch einer anderen Anwendung fähig sind, die zuweilen nützlich seyn kann. Dividirt man nämlich die Einheit durch die Zahlen dieser Tafeln, so erhält man die jährlichen Wittwenpensionen, welche man seiner Frau entweder durch einen Gulden Antrittsgeld, oder auch durch einen Gulden jährlichen Beytrag erwerben kann. So gibt nach Taf. VI, wenn der Mann 30 und die Frau 20 Jahre ist, ein Gulden Antrittsgeld die Pension $\frac{1}{3.243} = 0.308$, und ein Gulden jährlicher Beytrag die Pension $\frac{1}{0.2669} = 3.747$ fl. Man könnte also ein Institut, besonders für die ärmeren Classen, auch in Form einer Sparcasse oder so einrichten, daß jedes Mitglied von Zeit zu Zeit das, was es eben erübrigt hat, der Casse übergibt, und sich dadurch die für seine Wittwe bestimmte Pension allmählig vergrößert. Nehmen wir z. B. an, daß ein Mann von 40 mit einer Frau von 25 Jahren bey seinem Eintritte 50 fl. als Antrittsgeld entrichte, so begründet er dadurch eine Pension von

$\frac{50}{3.901} = 12.82$ Gulden.

Nach 5 Jahren, wo der Mann 45 und die Frau 30 Jahre hat, findet er sich in den Stand gesetzt, einen jährlichen Beytrag von 10 fl. entrichten zu können, wodurch er also eine Pension von $\frac{10}{0.4122} = 24.26$ Gulden erwirbt. Nach neuen 10 Jahren, wo der Mann 55 und die Frau 40 Jahre alt ist, hat er einen unverhofften Erwerb von 400 fl. gemacht, die er ebenfalls der Casse überläßt, und dadurch eine Pension von $\frac{400}{4.419} = 90.52$ Gulden begründet. Zählt man die verschiedenen Partialpensionen zusammen, so hat dieser Mann durch seine wiederholten kleineren Einlagen für seine Wittwe eine jährliche Pension von

$$12.82 + 24.26 + 90.52$$

das heißt, von $127\frac{6}{10}$ fl. erworben. Man bemerkt ohne meine Erinnerung, daß für eine solche Einrichtung der Anstalt, die Tafeln IV, V und VI eine bequemere Form erhalten werden, wenn man statt den in ihnen enthaltenen Zahlen die Quotienten setzt, welche man erhält, wenn man die Einheit durch jene Zahlen dividirt.

Sechstes Capitel.

Fehler, welche bey der Gründung von Wittweninstituten zu vermeiden sind.

Unrichtige Berechnungen sind allerdings das wesentlichste Gebrechen eines Instituts, da durch sie der Wohlstand und die Dauer der Anstalt für die Zukunft unmöglich gemacht wird. Aus diesem Grunde habe ich mich vor allem bemüht, zu zeigen, wie diese Berechnungen für ein neu zu errichtendes Institut sicher und genau geführt, und wie auch bey einer schon bestehenden Anstalt dieser Art etwa begangene Fehler dieser Rechnungen entdeckt, geprüft und verbessert werden sollen. Allein es gibt noch andere Fehler der organischen Einrichtung dieser Institute, die oft einen nicht minder verderblichen Einfluß auf die Wohlfahrt derselben äußern, und daher eine besondere Betrachtung verdienen.

Es ist für sich klar, daß die Gründer und Leiter der Anstalt nicht nur einsichtsvolle und rechtschaffene Männer seyn, sondern auch als solche im ganzen Lande bewährt seyn sollen. Das Loos so vieler hülflosen Wittwen und unmündigen Waisen darf nur in die Hände erprobter, rechtlicher Männer niedergelegt werden, und sie müssen auch im Volke als solche bekannt seyn, weil sonst das öffentliche Vertrauen leidet, ohne welches ein Institut dieser Art nie in Aufnahme kommen kann.

Um aber dieses Vertrauen des Publikums nicht auf eine bloße Meinung zu gründen, und es auch fernerhin durch Thatsachen zu erhalten und immer mehr zu erhöhen, soll nach jedem Jahre oder doch nach jeder bestimmten Anzahl von Jahren das Institut seinen Committenten öffentliche Rechnung ablegen.

Diese Rechnung soll aber nicht, wie es wohl öfter geschieht, nur allgemeine Angaben enthalten, aus denen Niemand klug werden und Niemand über den eigentlichen Bestand der Gesellschaft sich hinreichend aufklären kann, sondern sie soll den wahren Zustand des Instituts und das Verhältniß seiner gegenwärtigen Einnahme zu seinen Ausgaben, kurz eine sogenannte Bilance der Casse offen und redlich mittheilen, d. h. sie soll auf der einen Seite den Vorrath des baaren Geldes und den baaren gegenwärtigen Werth aller künftigen Beyträge der bereits bestehenden Mitglieder, und auf der anderen Seite den gegenwärtigen Werth aller bereits bestehenden und aller noch zu erwartenden Pensionen mit Bestimmtheit angeben, da nur daraus unmittelbar der wahre Zustand des Instituts vollkommen klar werden kann. Ich werde weiter unten zeigen, auf welche Weise diese Bilance berechnet werden soll. Hier begnüge ich mich zu bemerken, daß ein solcher Abschluß, eine solche, etwa am Ende eines jeden fünften Jahres angestellte allgemeine Untersuchung des Vermögens und der Schuld des Instituts, nicht bloß für die Mitglieder, sondern auch für die Vorsteher desselben von dem höchsten Interesse seyn muß, da durch sie und nur durch sie erkannt werden kann, ob man bisher auf rechtem Wege gegangen sey, und da, wenn eine Abirrung davon entdeckt wird, dem Fehler sogleich begegnet werden muß, weil die meisten dieser Uebel der Art sind, daß sie mit der Zeit wachsen und, wenn sie einmal eine gewisse Höhe erreicht haben, nicht ohne eine gänzliche Umänderung des Instituts und oft nur durch eine völlige Auflösung desselben entfernt werden können.

Ueberhaupt kann man bey Instituten dieser Art nicht genug auf Oeffentlichkeit und auf ein redliches Vorlegen aller Begegnisse desselben dringen. Die Mitglieder dieser Anstalten legen ihre theuersten Interessen in dem Schooße derselben nieder; sie vertrauen ihnen die Sorge für ihr Liebstes, was sie

auf Erden haben: sie versagen sich selbst, so lange sie leben, so viele Genüsse: sie leiden vielleicht Mangel und sparen mühsam und Jahre lang unter Arbeit und Kummer, um ihre Angehörigen von dem Drucke der Armuth zu befreyen; sie bringen ihr Letztes hin, es in die Hände der Wittwen- und Waisenväter des Landes niederzulegen — und sie sollten kein Recht haben, zu fragen und sich selbst durch eigene Ansicht zu überzeugen, ob ihr Eigenthum, ihr eigenes, mühsam erworbenes Vermögen auch dem gewünschten Zwecke gemäß verwaltet werde, oder ob vielleicht Unwissenheit, Trägheit, Eigennutz oder falsche Scham, begangene Irrthümer zu gestehen, das Institut vor der Zeit zu Grunde richten, und den Wittwen und Waisen, deren Thränen sie trocknen sollten, nur neue und oft noch viel schmerzlichere erpressen? Ohne übrigens bey den Vorstehern derselben irgend tadelnswürdige Absichten vorauszusetzen, wie könnte man das bey Männern, die aus eigenem Triebe sich entschlossen haben, dem ärmsten und verlassensten Theile ihrer leidenden Brüder, den unmündigen Wittwen und Waisen, Wohlthäter und hülfreiche Väter zu seyn, — auch ohne diese hier und überall ganz unwahrscheinliche Voraussetzung, sage ich, wird es doch in einer so hochwichtigen Angelegenheit auch dem besten, aber immer schwachen Menschen gut und räthlich seyn, sich selbst einen Zügel anzulegen, und sich dadurch absichtlich in eine Lage zu versetzen, in welcher jeder, aus Unkenntniß des Gegenstandes, aus übel angebrachten Mitleiden u. dgl. zu begehende Fehler oder Irrthum gleichsam unmöglich gemacht wird. Und dazu gibt es kein besseres Mittel, als jene Oeffentlichkeit, jene gerade und biedere Redlichkeit, die nicht nur in den Mittheilungen, sondern selbst in den Sitzungen der Vorsteher der Gesellschaft auf das genaueste beobachtet werden soll. Warum sollten diese Sitzungen nicht selbst öffentlich, warum sollte nicht der Zutritt zu denselben jedem Mitgliede, nicht als Stimmengeber, aber doch als Zeuge und

Zuhörer, förmlich erlaubt seyn? Oder warum sollte die Anstalt, wie es vielleicht schon geschehen seyn mag, jede öffentliche Beurtheilung ihrer Einrichtung zu hintertreiben oder gänzlich zu unterdrücken suchen? Warum nicht vielmehr jeden, der, was dem Ganzen frommte, zu sagen vermag, auffordern, seine Vorschläge und Verbesserungen offen und redlich mitzutheilen? Welche Gründe kann der zur Verheimlichung haben, der selbst mit sich und andern aufrichtig zu Werke geht und sich seines besten Vorsatzes bewußt ist? Etwa den Tadel? — Aber der ungegründete wird widerlegt und dann selbst getadelt werden: der gegründete aber wird jedem willkommen seyn, der es, nicht mit seiner Eigenliebe, sondern mit der Sache der leidenden Menschheit gut meint, und der in der That, durch sich oder durch andere, dazu beytragen will, daß diese wichtigen und wohlthätigsten aller Anstalten von allen Seiten beleuchtet und erörtert und ihrer, jedem Menschenfreunde so wünschenswerthen Vervollkommung immer näher geführt werden mögen, was nur auf diesem und auf keinem anderen Wege möglich ist.

Daß es vortheilhaft und sogar nothwendig ist, eine bedeutende Anzahl von Mitgliedern zusammen zu bringen, ist bereits oben erwähnt worden. Man hat gesehen, daß nur unter dieser Bedingung die Mortalitätstabellen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung, um welche beyde es sich hier vorzüglich handelt, eine gesicherte Anwendung finden können. Die Unternehmung muß daher schon in ihrem Aeußern der Art seyn, daß sie den eintretenden Mitgliedern so viel Sicherheit und so viele Vortheile gewähret, als nur immer mit einer zweckmäßig geführten Rechnung verträglich ist. Diese letzte aber ist und bleibt die Hauptsache, und darf daher keiner anderen nachstehen. Je größer die Gesellschaft, desto vortheilhafter ist sie im Allgemeinen für die Casse des Instituts sowohl, als für die Mitglieder desselben, und desto besser können die Einlagen der letztern benützt werden. Darum ist es

räthlich, in den Wittweninstituten den Eintritt nicht bloß den eigentlichen Ehepaaren, sondern, unter den bereits S. 75 vorgetragenen Bedingungen, auch jedem anderen Paare zu erlauben. Darum ist es im Gegentheile nachtheilig, solche Institute bloß für einzelne Städte oder bloß für kleine, entfernte Provinzen zu errichten, deren Daseyn oft erst nach Jahren im ganzen Lande bekannt wird, und die nie, selbst wenn alle Mitglieder nur auf Capitalfuß eintreten, ein großes Stammcapital zusammen bringen können, was immer wünschenswerth und selbst oft nothwendig ist, wenn die Gesellschaft bald zur Blüthe kommen und einer langen Dauer sich erfreuen soll. — Wo aber die erste Anlage des Instituts, wo die Berechnung fehlerhaft ist, da wird man in der bloßen Menge der Mitglieder sein Heil vergebens suchen. In den ersten Jahren wird wohl die große Frequenz der herbeyströmenden neuen Mitglieder das Deficit, welches durch die zu große Pension eines jeden durch den Tod Entfernten entsteht, zu decken scheinen, aber auch nur *scheinen*. Wenn aber in der Folge der Zeit die Anzahl der Wittwen sich vermehrt und die der Neueintretenden sich vermindert, so wird diese süße Täuschung sich mit dem gänzlichen und unheilbaren Untergang der Gesellschaft enden. Eine Anstalt, in welcher man durch ungemessene Versprechungen bloß eine große Anzahl von Mitgliedern an sich zu locken sucht, wird diese Versprechungen nur an den ersten Wittwen erfüllen können, die auf Kosten der übrigen im Ueberflusse schwelgen, während die folgenden dem Mangel und, wenn sie sonst kein Vermögen besitzen, dem Hungertode preis gegeben werden. Ein solches Institut wird nicht sowohl einer wohlthätigen Versorgungsanstalt, als vielmehr einer schlecht eingerichteten Lotterie zu vergleichen seyn, in welcher die ersten Ziehungen lauter Treffer, und die letzten lauter Nieten sind, und der ganze Gewinn, den man dadurch erreicht, wird seyn, daß man mit der Anzahl der neu eintretenden Mitglieder bloß die Anzahl der irregeführten und in ih-

ren Erwartungen grausam getäuschten Menschen vermehrt hat: je mehr ein solches Institut Mitglieder hat, desto mehr Unglückliche wird es haben.

Daß ferner Institute dieser Art von der Landesregierung bestätiget; daß die Pensionen derselben von Confiscationen, Executionen, Concursmassen, Arrest u. dgl. befreyt seyn; daß die Beyträge und die Pensionen immer von einerley Größe und in demselben unveränderlichen Münzfuße entrichtet werden; daß die Capitalien nicht zu lange unfruchtbar in der Casse liegen, sondern gut und auf das sicherste angelegt werden; daß bey dem Eincassiren der Beyträge sowohl, als bey dem Auszahlen der Pensionen die größte Ordnung herrschen, und beyde nur in bestimmten Monaten des Jahres (z. B. im Januar und im Julius) vorgenommen werden; daß das Alter der Eintretenden durch Taufscheine und die Gesundheit derselben durch ärztliche Zeugnisse mit Bestimmtheit erwiesen werden sollen u. s. w. ist alles für sich klar, und wird auch in den meisten mir bekannten Instituten mit Sorgfalt beachtet, daher es unnöthig seyn würde, sich hier dabey weiter aufzuhalten. Ich will mich daher nur noch auf solche Bemerkungen beschränken, die ich minder oder unter verschiedenen Modificationen beobachtet sehe, und die doch der Art sind, daß sie auf den Bestand und die Dauer der Anstalt einen oft sehr wesentlichen Einfluß äußern.

In manchem Institute kann man nur auf Capital-, in anderen nur auf Contributionsfuß eintreten, und wieder in anderen muß zugleich ein anfängliches, gewöhnlich sehr kleines Antrittsgeld, und überdieß jedes folgende Jahr ein Beytrag entrichtet werden. Bey der letzten Art sehe ich keine Vortheile, die durch das kleine Antrittsgeld erreicht werden können. Die beyden anderen Arten aber haben das Eigene, daß bey der ersten, dem Eintritte bloß auf Capitalfuß, das Antrittsgeld für etwas bedeutende Pensionen sehr groß und daher dem Eintretenden beschwerlich ist, während

bey der zweyten Art, dem Eintritte bloß auf Contributionsfuß, die Casse nur sehr langsam zu einem ansehnlichen Stammcapital kommen kann, was doch, wie bereits oben gesagt wurde, zum Gedeihen der Gesellschaft sehr wünschenswerth ist. Ich halte es daher für angemessener, beyde Arten des Eintrittes zugleich frey zu stellen, und im Allgemeinen der Wahl eines jeden neuen Mitgliedes zu überlassen, ob er auf Capital- oder auf Contributionsfuß eintreten will. Dann werden die Wohlhabenden durch Antrittsgelder das Stammcapital vergrößern, und die minder Bemittelten, denen der zweyte Weg offen steht, nicht mehr von dem Eintritte zurück gehalten werden. Diese Einrichtung hat noch überdieß den Vortheil, daß auch ältere Mitglieder, die in Instituten, wo man bloß auf Contributionsfuß eintritt, der Sicherheit wegen ausgeschlossen werden müssen, ohne Bedenken angenommen werden können, wenn sie nur die Bedingung eingehen, bloß auf dem ersten der beyden Wege, nämlich bloß auf Capitalfuß, einzutreten. Wenn ein Mann, der bey seinem Eintritte über 60 und selbst über 70 Jahre ist, den ganzen Werth der Wittwenpension für seine Frau sogleich als Antrittsgeld erlegt, so ist es nahe eben so viel, als hätte er ihr eine Leibrente gekauft, und man hat keinen Grund, ihn seines Alters wegen nicht in die Gesellschaft aufzunehmen. Aus dieser Ursache sind auch in der Tafel VI bey den Männern über 60 Jahren die jährlichen Beyträge nicht mehr angegeben worden, weil für sie der Eintritt auf Contributionsfuß zu unsicher ist.

Dafür scheint es mir aber wesentlich, die Pensionen nicht so groß anzusetzen, wie dieses in vielen neueren Instituten der Fall ist, wo die geringste Pension schon 100 und bey einigen sogar 200 Gulden beträgt. Denn für so große Pensionen sind natürlich auch die Antrittsgelder sehr groß, ja selbst die jährlichen Beyträge oft noch so bedeutend, daß die ärmere Classe sie nicht mehr gut bestreiten kann. Für eine jährliche Pension von 200 fl. müßte

z. B. (nach Taf. VI) ein Mann von 40 mit einer Frau von 35 Jahren entrichten

entweder das Antrittsgeld von 617.6

oder den jährlichen Beytrag von 60.2 Gulden,

und ein Mann von 55 mit einer Frau von 20 Jahren müßte einlegen

entweder das Antrittsgeld von 1309

oder den jährlichen Beytrag von 148 Gulden;

Leistungen, die vielen sehr beschwerlich und selbst unmöglich fallen können, und die doch nicht, bloß weil sie nicht reich genug sind, von dem Institute ausgeschlossen werden sollen. Ich glaube daher, daß es vortheilhafter seyn würde, statt den gewöhnlichen Classen der Pensionen zu 100, 200, 300 fl. u. f. eine einzige, aber sehr kleine, z. B. eine Pension von 10 fl. unter der Benennung einer Actie oder Rente oder dgl. einzuführen, und dann Jedem frey zu stellen, ob er eine solche Rente auf Capital- oder auf Contributionsfuß, oder ob er eine oder mehrere Renten auf Capital, und überdieß jetzt oder später noch eine oder mehrere Renten auf Contributionsfuß kaufen wolle, wodurch dem Reicheren, der sich sogleich 10 oder 20 Renten auf einmal verschaffen kann, und zugleich dem Armen geholfen ist, der sich zufrieden stellt, auch nur eine oder einige wenige dieser Renten zu besitzen, alles unter der oben erwähnten Bedingung, daß 60 oder 70jährige Mitglieder nur auf Capitalfuß eintreten, und daß der Reiche nicht mehr als eine vorausbestimmte Anzahl von Renten kaufen kann, weil sonst, bey einem Besitzer zu vieler Renten, die Wohlfahrt der Casse zu sehr von einer einzigen Person abhängig wird, da doch die ganze ihr zu Grunde liegende Einrichtung nach S. 20 eine gesellige seyn soll, die desto sicherer ist, je größer die Anzahl der Mitglieder ist, aus welcher die Gesellschaft besteht.

Daß Minderjährige, vor dem Feinde dienende Militärpersonen, Feldärzte, Seefahrer oder Leute, die ein sich selbst zerstö-

rendes und ausschweifendes Leben führen, von der Gesellschaft ausgeschlossen werden sollen, ist für sich klar. Dasselbe aber auch auf Geistliche, Aerzte u. s. auszudehnen, die bey ansteckenden Krankheiten mit Gefahr ihres eigenen Lebens ihren Mitmenschen zu Hülfe kommen, wäre lieblos und vielleicht selbst ungerecht, besonders da die Anzahl derselben nicht so groß ist, um einer zahlreichen Gesellschaft bedeutenden Schaden zu verursachen.

Wenn die Trennung der Ehe durch Ehescheidung erfolgt, so hat diese keinen Einfluß auf die frühere Zahlung der Pension, da die Pension, dem eingegangenen Vertrage gemäß, erst durch den Tod des Mannes zahlbar wird, wenn dieser, was auch hier vorausgesetzt wird, seine jährlichen Beyträge bis an das Ende seines Lebens entrichtet hat. Stirbt der Mann durch Selbstmord, durch Duell oder durch richterlichen Spruch, so ändert auch dieß den Vertrag nicht, und die Wittwe muß als eine Person behandelt werden, die ihren Mann durch einen Unglücksfall verloren hat, und durch den Tod desselben in die Rechte der Pension tritt.

Geschenke und Legate irgend einer Art sollen bey der Berechnung der Pensionen nicht berücksichtiget werden, weil sie ungewiß sind, und ihre Größe ganz unbestimmbar ist. Dafür muß bey diesen Rechnungen auf die Ausgaben und Unkosten der Casse, Besoldungen der Beamten, Kanzleygebühren u. dgl. Rücksicht genommen, und die Einlagen oder Beyträge jedes Paares diesem gemäß etwas erhöht werden. Wie viel diese Erhöhung beträgt, hängt von der getroffenen Einrichtung des Instituts und anderen besonderen Verhältnissen ab, und kann hier nicht näher bestimmt werden.

Da die Wittwenpension, dem mit dem Institute geschlossenen Vertrage gemäß, von dem Tode des Mannes bis zu dem der Wittwe währt, die Wittwe mag sie bedürfen oder nicht, so ist es auch unbillig, diese Pension bey einer zweyten Ehe der

Wittwe zurückzuhalten, wie bereits S. 53 gesagt worden ist. Diese Vorkehrung mag der Casse vortheilhaft seyn, da sie aber ungerecht ist, so muß sie entfernt werden. Die Vorherverkündigung derselben in den Statuten kann sie nicht rechtlicher machen, und gehört nur zu den sogenannten Vorbehalten der Casse, da sie doch keiner sicheren Berechnung unterlegt werden kann. In dieselbe Cathegorie gehören auch die Probejahre, d. h. die Einrichtung, nach welcher die Wittwen, deren Männer im ersten oder in den zwey, drey . . ersten Jahren nach ihrem Eintritte sterben, nicht nur keine Pension, sondern auch keine Zurückzahlung der Antrittsgelder erhalten. Es ist irrig, diese Vorkehrung für eine dem Institute sehr vortheilhafte Einrichtung zu halten. Sie kann nur wenig nützen, da, nach den geforderten ärztlichen Zeugnissen, die meisten der eintretenden Mitglieder gesund sind, und daher wenigstens die ersten Jahre überleben werden; aber sie kann viel schaden, da ein großer Theil, der sonst eingetreten wäre, durch diese Bedingung zurückgehalten wird. Sie ist endlich ungerecht, da bey den Berechnungen der Wittwenpensionen, wie wir oben gesehen haben, darauf Bedacht genommen wurde, daß schon im ersten Jahre der Anstalt bereits Wittwen entstehen, die daher auch berücksichtiget werden müssen. Bey einem gut eingerichteten Institute soll der frühere oder spätere Tod irgend eines individuellen Mannes keinen Einfluß auf die Pension seiner Wittwe äußern. Welche Billigkeit wäre es auch, in der Anstalt VI. (S. 61) der Wittwe eines 60jährigen Mannes, der bey seinem Eintritte über 1000 fl. auf einmal in die Casse gab, diese Einlage und die Pension zu verweigern, während man die letzte der Wittwe eines 33jährigen Mannes zusagt, der nur drey Jahre in der Gesellschaft gelebt und daher der Casse noch nicht 150 fl. gegeben hat. Das Antrittsgeld gehört ohne Zweifel der Casse, aber die dafür bedungene Pension gehört mit demselben Rechte der Wittwe, und

diese Pension soll bey dem, früh oder spät eintretenden Todestage des Mannes, dem Vertrage gemäß, ohne Ausnahme ausgezahlt werden.

Zu diesen kleinlichen Vorbehalten und künstlichen Restrictionen, gehören auch die Vortheile, welche man den ersten Mitgliedern, oder den sogenannten Gründern der Gesellschaft an einigen Orten angedeihen läßt, in der Absicht, dadurch bald eine größere Anzahl von Eintretenden zu erhalten. Die Vorsteher einer Wittwenanstalt sollen, nicht Eigenthümer, sondern nur getreue und redliche Verwalter der ihnen anvertrauten Summen seyn, und es ist ihre Pflicht, diese fremden Summen unter alle hülflosen Wittwen nach demselben Gesetze zu vertheilen, nicht aber, wie mit eigenem Vermögen, dem einen Theile derselben auf Kosten der übrigen, großmüthige Geschenke zu machen. Bevorrechtungen jeder Art sind dem Geiste einer solchen Gesellschaft entgegen, in welcher alle Mitglieder, ohne Unterschied, gleich behandelt werden sollen.

Noch schädlicher aber sind jene Vorbehalte, durch welche sich die Vorsteher der Anstalt die Macht sichern, ohne Beystimmung der andern Mitglieder, Aenderungen in den Statuten vorzunehmen, sogleich verbindliche Provisorien zu treffen u. dgl. Wer schon gleich anfangs auf solche Mittel und Auswege denken muß, ist seiner Sache nicht sicher, und es läßt sich beynahe mit Gewißheit voraussagen, daß er auch bald in die Lage kommen werde, diese Nothbehelfe in der That zu ergreifen. Ein solches Verfahren stört aber alles Vertrauen, ohne welches die Gesellschaft nicht gedeihen kann. Diese nachträglichen Verbesserungen führen nur selten zu dem gewünschten Ziele, aber wohl oft zu dem Ruin der Gesellschaft. Sie bestehen gewöhnlich in Beschränkungen, in Erhöhungen der Einlagen, in Verminderung der Pensionen u. dgl. und diese fatalen Ausdrücke sind nur zu oft schon die Vorläufer der gänzlichen Auflösung des Instituts gewesen, weil

sie verkündigen, daß es demselben an der Rechnung, d. h. an der Basis fehlt, ohne welche keine Anstalt dieser Art bestehen kann.

Daß bey der Berechnung der Pensionen das Alter des Mannes eben so wohl als das der Frau eines jeden eintretenden Paares gehörig berücksichtiget werden müsse, ist bereits oben an mehreren Orten erinnert worden, und geht so unmittelbar aus der Natur der in Cap. IV. erklärten Rechnungen hervor, daß es überflüssig scheint, weiter darauf zu bestehen, oder eine schon an sich so klare Sache noch durch weitere Beweise begründen zu wollen. Die Tafeln IV, V und VI zeigen auf den ersten Blick, daß mit gleichalten Frauen der ältere Mann ein größeres Antrittsgeld oder einen größeren jährlichen Beytrag geben muß, als der jüngere, weil der ältere Mann in der Ordnung eher sterben, also nicht so lange beytragen, und weil seine Frau eher zu dem Genusse der Pension kommen wird, als die des jüngern Mannes. Dieselben Tafeln zeigen aber eben so deutlich, daß von gleich alten Männern für die ältere Frau ein kleineres Antrittsgeld oder ein kleinerer jährlicher Beytrag entrichtet werden muß, als für die jüngeren Frauen, weil die ältere Frau nach dem Gesetze der Wahrscheinlichkeit eher sterben, also dem Institute nicht so lange zur Last fallen wird, als die jüngere. Die Unterschiede der Zahlungen, welche bloß durch die Verschiedenheit des Alters der Frau eingeführt werden, sind oft sehr bedeutend, wie bereits S. 70 gezeigt worden ist, und sie können 1000, ja selbst über 2000 Gulden betragen. So große Unterschiede wird aber doch wohl kein Berechner eines Wittweninstitutes für Kleinigkeiten halten, über die man ohne alle Berücksichtigung weggehen könnte. Und doch soll es, wie man mich versichert, nicht bloß ein, sondern sogar sehr viele solche Institute geben, welche diese Berücksichtigung gar nicht für nöthig gehalten haben, und in welchen die Größe der Einlage jedes Paares bloß nach dem Alter

des eintretenden Mannes bestimmt wird, unbekümmert, ob seine Frau zwanzig oder sechzig Jahre zählt. Es ist schwer zu erklären, wie Männer, denen eine so sonnenklare Sache noch unbekannt, und denen die ersten Principien dieses Gegenstandes noch fremd sind, sich zu Gründern und Vorstehern derselben aufwerfen können. Aber es ist gewiß, daß Institute dieser Art eine weitere Prüfung durch Rechnung (nach Cap. V) weder verdienen, noch bedürfen, daß ihnen selbst gar keine eigentliche Rechnung zu Grunde liegen kann, und daß sie daher, ohne allen Anstand, als zweckwidrig und unbrauchbar verworfen werden müssen.

Es ist bereits oben S. 54 gesagt worden, daß das Princip der Individualität allen Berechnungen einer jeden Versorgungsanstalt, als eine nothwendige und unerläßliche Bedingung, zu Grunde liegen muß, oder daß die Renten und Pensionen, welche für eine gewisse Person gekauft werden, auch nur für diese individuelle Person gelten, und auf keine andere übertragen werden können. Ohne dieses Princip haben die in Cap. IV ausgeführten Rechnungen weder Sinn noch Bedeutung, und doch hat man nichts anderes, nach dem man sich bey der Bestimmung der Pensionen mit Sicherheit richten könnte. Wer dieß verkennt, dem bleibt daher nichts übrig, als den Weg der Rechnungen ganz zu verlassen, und sich wieder jenen heillosen beyläufigen Ueberschlägen hinzugeben, und sich dem blinden Zufalle in die Arme zu werfen, wie es leider nur zu viele schon gethan haben.

Man kann ein Wittweninstitut als eine Gesellschaft betrachten, in welcher jeder Eintretende den subjectiven Zweck hat, durch seine Einlage eine größere und mehr gesicherte Versorgung für seine Angehörigen zu hinterlassen, als es durch eine bloße eigene Aufsparung des dazu bestimmten Geldes möglich wäre. Denn in dem letzten Falle ist jeder gezwungen, für sich selbst zu sor

gen, ohne von den andern unterstützt zu werden. In dem ersten Falle aber, in der Versorgungsanstalt, sorgt jeder Einzelne, nicht bloß für sich, sondern für alle, und alle wieder für den Einzelnen durch gegenseitige, gesellige Unterstützung, daher hier die Hülfe wohlfeiler, kräftiger und sicherer zugleich ist. So fern in einer solchen Anstalt jeder durch seine Einlage etwas wagt, was er am Ende vielleicht (wenn seine Frau vor ihm stirbt) nicht brauchen kann, während er aber allen übrigen damit nützt, so fern kann eine Anstalt dieser Art als ein Spiel betrachtet werden, welches aber vor allen anderen Spielen, die mehr oder weniger alle vom Zufalle abhängen, den wesentlichen Vortheil hat, daß hier nur der verlieren kann, der des Gewinnes nicht bedarf, und daß im Gegentheile der gewinnt, der es allein bedarf; so daß der glückliche Verlierende dem unglücklichen Gewinnenden Hülfe und Unterstützung leistet. — Allein diese schöne, harmonische Compensation, auf der die Wohlfahrt eines Wittweninstituts beruht, und auf der, als auf einer Basis, auch die ganze Einrichtung desselben gegründet seyn soll, wird nicht nur gestört, sondern ganz aufgehoben, sobald das oben erwähnte Princip der Individualität nicht unabänderlich beybehalten wird. In einem Institute, in welchem die zweyten und ferneren Ehen der Männer erlaubt sind, in welchem also die Pension, wenn die mit dem Manne eingetretene Frau stirbt, nicht, wie es seyn soll, dem Institute zurückfällt, sondern auch auf die zweyte und folgende Frau desselben Mannes übergeht, in einem solchen Institute gibt es kein Mitglied mehr, das seine Einlage, nicht zu seinem eigenen Privatvortheile, sondern nur zu dem Besten des Institutes gegeben hätte; in einem solchen Institute werden gleichsam alle Weiber als unsterblich angenommen, da jedes derselben, sobald es stirbt, durch ein zweytes, und dieses wieder durch ein drittes u. s. f. ersetzt wird; in einem solchen Institute endlich gibt es keinen Verlierenden mehr, sondern nur Gewinnende, und da

nun, wo alle gewinnen, doch irgendwo wer seyn muß, an dem sie gewinnen, so muß dieses die Casse selbst seyn, die also bey einer so ganz verkehrten Einrichtung der allein verlierende Theil des Institutes seyn, d. h. die vor der Zeit unausweichlich zu Grunde gehen muß.

Man sollte es kaum für möglich halten, daß irgend ein Mensch auf einen solchen Einfall kommen könnte. Mir wenigstens ist von allen den als gut oder auch nur als mittelmäßig anerkannten Instituten des Auslandes, wo man über diese Anstalten schon seit langem reiflich nachgedacht hat, auch nicht ein einziges bekannt, in dem diese zweyten und ferneren Ehen aufgenommen worden wären. Wo immer in diesen Instituten die Frau vor dem Manne stirbt, hat der Vertrag sein Ende, die Pension fällt an das Institut zurück, und wenn derselbe Mann eine zweyte Frau versorgt wissen will, so muß er, wie er es früher für seine erste gethan hat, als ein neues Mitglied wieder in die Gesellschaft treten. Aber nicht genug, daß eine solche Idee noch in keinem guten Institute zur wirklichen Ausführung gebracht worden ist; man findet nicht einmal in irgend einem der vielen und als gut und klassisch anerkannten Werken der verschiedenen Gelehrten über diesen Gegenstand, nur als Beyspiel oder als ein Problem für die Schule, so der Seltenheit oder des Zeitvertreibes wegen, diesen sonderbaren Einfall aufgestellt oder auch nur erwähnt, obschon es sonst, wie man sagt, den Gelehrten an Paradoxien und wunderlichen Einfällen nicht eben fehlen soll; wahrscheinlich aus dem ganz einfachen Grunde, weil es an und für sich thöricht ist, sich mit Dingen zu beschäftigen, die nichts sind und zu nichts führen.

Die Absurdität und die gänzliche Unausführbarkeit dieser Idee muß auch jedem, der selbst die hier nöthigen Rechnungen nicht näher kennt, sogleich auf den ersten Blick einleuchten. In der That, bey einem auf eine Ehe eingerichteten Wittweninstitute

hat jedes Paar bey seinem Eintritte zwey Fragen zu beantworten: nämlich wie alt der Mann und wie alt diese seine gegenwärtige Frau ist. Aus diesen beyden Fragen läßt sich dann mit Hülfe der Mortalitätstabellen bestimmen, wie lange jedes von ihnen wahrscheinlich noch leben werde, und daraus wird endlich berechnet, wie viel dieses Paar an das Institut zu leisten, und wie viel es dafür von dem Institute zu fordern habe. — Allein bey einem Institute, in welchem auch die zweyten und folgenden Ehen zugelassen werden, ist es mit jenen beyden Fragen noch lange nicht genug, sondern es müssen da noch mehrere andere beantwortet werden, die eben so wichtig und nothwendig sind, da von ihnen die Größe der Einlage und der Pension eben so, wie von jenen beyden ersten, abhängig ist. „Wann wird dieser Mann, der jetzt eintritt, seine zweyte Frau, und wann wird er die folgenden nehmen? Wie alt werden alle diese Frauen nach der Reihe seyn? Welcher Gesundheit werden sie sich erfreuen, und wie lange wird die letzte von ihnen, die die Pension bezieht, leben und dem Institute zur Last fallen? u. s. w.“ Diese und andere ähnliche Fragen müssen nothwendig zuerst beantwortet seyn, wenn von einer Bestimmung der Einlage und der Pension dieses Paares, wenn überhaupt noch von einer Berechnung des Instituts die Rede seyn soll. — Allein wer wird, wer kann Fragen dieser Art beantworten? Wie alt und wie gesund dieser oder jener Mann mit seiner gegenwärtigen Frau jetzt ist, läßt sich durch ihre persönlichen Aussagen, durch Taufscheine und ärztliche Zeugnisse erfahren: aber das Alter, die Gesundheit, die Lebensdauer aller der anderen Frauen, die dieser Mann vielleicht noch einmal heirathen wird, das kann weder er selbst, noch ein anderer für ihn uns sagen. Und doch muß es gesagt werden, wenn wir anders noch rechnen, und nicht auf gut Glück und Gerathewohl hin uns mit einem sogenannten beyläufigen Ueberschlage begnügen wollen. Dazu kömmt noch, daß dort, in den Instituten auf eine

Ehe, mit dem Alter der beyden eintretenden Personen alles gegeben ist, was wir zu einer bestimmten Rechnung brauchen. Denn dieses Alter gibt uns mit Hülfe der Mortalitätstafeln die wahrscheinliche Lebensdauer beyder Personen, und diese Mortalitätstafeln sind auf Erfahrungen von Jahrhunderten, sind auf Naturereignisse gegründet, in deren Aufeinanderfolge man ein bestimmtes und unveränderliches Gesetz mit der größten Deutlichkeit erkennt. Denn obschon vielleicht nichts ungewisser ist, als die Dauer des menschlichen Lebens, wenn von einem bestimmten Individuum die Rede ist, so gibt es doch unter allen unseren sogenannten menschlichen Wahrheiten kaum einige, die weniger Ausnahmen und Ungewißheiten unterworfen wären, als die mittlere Dauer einer Menge von Individuen, wie unsere verschiedenen Sterblichkeits-Tabellen, ihrer geringen Unterschiede ungeachtet, selbst am besten bezeugen. Allein hier, in den Instituten auf mehrere Ehen, ist es mit jener Sterblichkeits-Tabelle noch nicht genug, man muß auch noch eine Tafel der Heirathslustigkeit der alten, abgelebten Ehemänner, eine Tafel ihrer wunderlichen Launen und eine andere ihrer kränklichen Einfälle haben u. s. — Diese Launen und Einfälle aber, mögen sie doch immerhin auch Naturereignisse seyn und zu der allgemeinen Ordnung der Dinge gehören: für uns wenigstens sind und bleiben sie Zufälle, die Niemand voraus sagen kann, und auf die daher Niemand so thöricht seyn darf, eine sogenannte Rechnung zu gründen, von deren Erfolg das Schicksal so vieler hülflosen Wittwen und unmündigen Waisen abhängig gemacht werden soll. — Die zweyten und ferneren Ehen sind also, als mit der Vernunft und der Gerechtigkeit im Widerspruche, in keinem Wittweninstitute zuzulassen.

Aber, als ob es mit diesen weiteren Ehen noch nicht genug wäre, jedes Institut vor der Zeit zu Grunde zu richten, so sollen einige, wie man sagt, den Unsinn gar so weit treiben, daß sie

nicht nur die, bloß für die erste Frau gekaufte Pension, auch der zweyten und allen folgenden Frauen überlassen, sondern daß sie, auch wenn endlich die letzte aller dieser Frauen gestorben seyn wird, im Uebermaaße ihrer Freygebigkeit noch nicht zu zahlen aufhören, sondern dieselbe Pension auch noch den Kindern dieser Frauen und zwar, bis das jüngste derselben ein bestimmtes Alter erreicht, ganz und ungetheilt überlassen wollen.

Es ist mir ganz unmöglich, den Leichtsinn und die Unkenntniß des Gegenstandes und den gänzlichen Mangel an aller Ueberlegung auszudrücken, der solchen ganz entsetzlichen Einfällen zu Grunde liegen muß.

Der Fehler, den man hier begeht, ist derselbe, der oben bey der Aufnahme mehrerer Ehen begangen wurde, nur weiter fortgeführt und vergrößert: der Mangel des Princips der Individualität. Die für eine bestimmte Wittwe gekaufte Pension kann eben so wenig auf eine andere Wittwe, als auf die Kinder der einen oder der anderen übertragen werden. Wenn jene erste Wittwe stirbt, so stirbt auch mit ihr der Vertrag, und die erloschene Pension fällt an das Institut zurück. Eine Wittwenpension ist keine Waisenpension und umgekehrt, und in einer Wittwenanstalt können keine Waisen, so wie in einer Waisenanstalt keine Wittwen versorgt werden. Will der Vater der Familie, wie es recht und billig ist, nebst seiner Frau auch seine Kinder nach seinem Tode versorgt wissen, so muß er für jedes dieser Kinder einzeln eine angemessene Einlage in die Waisencasse geben, und wenn dieses Kind vor der Erreichung des in dem Vertrage bestimmten Jahres stirbt, so erlischt auch hier der Vertrag sammt der Pension, und die letzte kann in keinem Falle auf die übrigen überlebenden Kinder übergehen, weil die Pension für dieses, und nur für dieses gekauft worden ist.

Da es die Absicht des gegenwärtigen Werkchens nicht ist,

die Theorie und die Berechnung der Waisenpensionen umständlich mitzutheilen, so begnüge ich mich, hier einige, den Tabellen IV, V und VI ähnliche kleine Tafeln hinzuzufügen, aus welchen man das nöthigste Hiehergehörende gleichsam mit einem Blicke nehmen kann [11]).

Wenn die Waisenpension von jährlich 1 Gulden erst dann ausgezahlt wird, wenn der Vater sowohl als auch die Mutter todt sind, und so lange dauert, bis die Waise ihr 20stes Lebensjahr erreicht, so wird das Antrittsgeld, welches bey dem Eintritte der Waise in die Anstalt, ohne weitere jährliche Beyträge, entrichtet wird, durch folgende Tafel bestimmt, die sich auf die Mortalitätstafel von Baumann-Süßmilch und auf den Zinsfuß 1.05 bezieht.

Vollendete Lebensjahre		Vollendete Lebensjahre des Kindes			
des Vaters	der Mutter	1 Jahr	5 Jahr	10 Jahr	15 Jahr
25	15	0.10	—	—	—
30	20	0.14	0.10	—	—
35	25	0.19	0.13	0.05	—
40	30	0.25	0.19	0.07	0.01
45	35	0.38	0.27	0.10	0.02
50	40	0.54	0.38	0.14	0.02
55	45	0.78	0.56	0.21	0.04
60	50	1.15	0.86	0.34	0.06

Für eine jährliche Pension von 100 fl. wird also, wenn bey dem Eintritte das Kind 10, der Vater 40 und die Mutter 30 Jahre vollendet haben, das Antrittsgeld von 7 Gulden entrichtet. Wäre von denselben Aeltern ein anders Kind bey seinem Eintritte ein Jahr alt, so würde das Antrittsgeld 25 fl. betragen u. s. w.

Man sieht, daß für diese Gattung von Waisenpensionen die Einlagen sehr gering sind. Allein den Kindern wird dadurch

auch nur sehr wenig geholfen, da sie, so lange ihre Mutter, die Wittwe, lebt, keine Pension beziehen, und von der Mutter erhalten werden müssen. Die Einlagen sind so klein, weil ihnen die wenig wahrscheinliche Voraussetzung zu Grunde liegt, daß nicht nur der Vater, sondern auch die Mutter todt seyn wird, ehe das Kind das 20ste Jahr erreicht.

Wohlthätiger wird auf die Familie die zweyte Gattung von Waisenpensionen wirken, die gleich bey dem Tode des Vaters, also auch während dem Leben der Wittwe, ausgezahlt wird. Die folgende Tafel gibt diese jährlich in 1 fl. bestehende Waisenpension, die von dem Tode des Vaters bis zu dem vollendeten 20sten Jahre des Kindes dauert, nach derselben Mortalitätstabelle und demselben Zinsfuße, wie die vorhergehende Tafel.

Vollendetes Alter des Kindes.

Alter des Vaters beym Eintritt	5 Jahre		10 Jahre		15 Jahre	
	a	b	a	b	a	b
20	0.69	0.076	—	—	—	—
25	0.80	0.090	0.43	0.066	—	—
30	0.95	0.108	0.52	0.074	0.15	0.038
35	1.12	0.130	0.58	0.082	0.19	0.048
40	1.29	0.152	0.70	0.100	0.21	0.052
45	1.59	0.194	0.86	0.128	0.26	0.062
50	1.94	0.250	1.09	0.168	0.34	0.086
55	2.37	0.320	1.27	0.200	0.40	0.102
60	2.99	0.442	1.67	0.282	0.51	0.132
65	3.73	0.620	2.19	0.404	0.70	0.194

wo a das Antrittsgeld bey dem Eintritte, und b der jährliche Beytrag ist. Mit diesem Eintrittsgelde (ohne weitre Beyträge) oder auch, mit diesem jährlichen Beytrage (ohne Antrittsgeld) wird die jährliche Waisenpension von 1 Gulden erkauft, die

von dem Tode des Vaters bis zu dem 20sten Lebensjahre des Kindes dauert. Ist also z. B. bey dem Eintritte das Kind 10 und der Vater 40 Jahre, so ist für eine Pension von jährlich 100 fl. das Antrittsgeld a = 70 oder der jährliche Beytrag b = 10 Gulden. Ein Kind von 5 Jahren und von demselben Vater würde a = 129 und b = 15.2 Gulden entrichten u. s. f.

Bey dieser zweyten Tafel muß (wie S. 53) bemerkt werden, daß der Versorger nicht bloß der Vater, sondern auch die Mutter oder irgend eine andere Person seyn kann, wo dann die Pension von dem Tode dieser Person bis zu dem 20sten Alter des Kindes zahlbar seyn wird. Lebt nach vollendetem 20sten Jahre des Kindes der Versorger noch, so wird die Pension nicht ausgezahlt, sondern sie fällt an das Institut zurück. Stirbt aber das Kind vor seinem 20sten Jahre, so erlischt die Pension, da sie auf kein anderes Kind übertragen und nur demjenigen ausgezahlt werden kann, für welches sie gekauft worden ist. Die jährlichen Beyträge endlich werden von dem Versorger so lange gefordert, als er lebt und bis das Kind die erste Hälfte des 20sten Lebensjahres erreicht hat.

Dieß sind die vorzüglichsten Fehler, welche bey der Gründung der Wittweninstitute sorgfältig zu vermeiden sind. Ich habe mich bemüht, das Irrige derselben von allen Seiten zu zeigen und so deutlich als möglich zu machen, und ich wünsche und hoffe, daß man darauf in der Folge Rücksicht nehmen wird. Die Einwürfe und sogenannten Widerlegungen, die man dagegen aufgestellt hat und ohne Zweifel auch künftig noch aufstellen wird, sind sämmtlich so kläglich, daß sie keine weitere Beachtung verdienen. Sie zeugen alle nur von der Unbekanntschaft ihrer Urheber mit den ersten Grundsätzen des Gegenstandes, um den es sich hier handelt, und die meisten von diesen Menschen würden besser thun, erst zu lernen, ehe sie es übernehmen, andere be-

lehren zu wollen. Wer dieß nicht kann oder nicht will, oder wer wohl, besseren Willens, aber auf Irrwegen sich abmühend, sich nur immer tiefer in seine Fehler und endlich in fixe Ideen hineinstudiert, und endlich aller Ueberzeugung durch Gründe unzugänglich wird, mag wohl auf Mitleid, aber nicht auf Beachtung höherer Art gegründeten Anspruch machen.

Siebentes Capitel.

Bilance der Casse.

Es ist bereits oben (S. 75) erinnert worden, daß es, selbst wenn man sich aller möglichen Vorsicht bey der getroffenen Einrichtung einer Wittwenanstalt bewußt ist, immer räthlich und selbst nothwendig ist, alle fünf oder zehn Jahre eine vollständige Untersuchung des bisherigen Standes der Gesellschaft vorzunehmen, um dadurch den möglichen Unfällen vorzubeugen, oder doch die immer anwachsenden nachtheiligen Folgen derselben zu verhüten, welche aus den noch bestehenden Unvollkommenheiten der Mortalitätslisten; welche aus der Natur der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die, wenn sie nur auf einige Jahre und auf anfangs noch kleinere Gesellschaften angewendet wird, immer noch einige Unsicherheit zurück läßt, und welche endlich aus nicht vorherzusehenden unglücklichen Zufällen aller Art entstanden seyn könnten.

Um sich aber von dem gegenwärtigen Zustande des Instituts eine vollkommene Kenntniß zu erwerben, muß man das gesammte Vermögen, und die gesammte Schuld desselben für eine bestimmte Zeit berechnen, und diese Berechnung heißt gewöhnlich die Bilance der Gesellschaft.

Unter dem Vermögen des Instituts wird aber nicht bloß der gegenwärtige Vorrath der Casse an baarem Gelde verstanden, sondern auch der gegenwärtige baare Werth aller Beyträge, welche die bereits bestehenden Mitglieder noch für die Zukunft mit jedem Jahre an die Casse entrichten werden. Ganz eben so ist die Schuld des Instituts nicht nur der baare Werth aller, an schon jetzt bestehende Wittwen auszuzahlenden Pensionen, sondern auch der gegenwärtige baare Werth aller derjenigen Pensionen, welche

den noch künftigen Wittwen der Anstalt ausgezahlt werden müssen.

Bestimmmung des Vermögens der Casse.

Dieses Vermögen besteht also, wie gesagt, erstens aus dem in der That in der Casse vorräthigen oder auf Zinsen ausgelegten baaren Gelde. Die Größe dieser Summe muß also bekannt seyn. Wir wollen sie der Kürze wegen mit I bezeichnen.

Dieses Vermögen besteht aber auch zweytens aus dem gegenwärtigen Werthe aller noch künftigen jährlichen Beyträge der jetzt bestehenden Mitglieder der Gesellschaft. Wir wollen diesen Werth der Beyträge durch II bezeichnen.

Wie findet man diesen Werth II der noch künftigen Beyträge bey irgend einem gegebenen Paare der Gesellschaft?

Nehmen wir, um uns sogleich durch ein besonderes Beyspiel deutlich zu machen, an, daß von diesem Paare bey dem Eintritte desselben der Mann 45 und die Frau 35 Jahre hatte. Für dieses Paar gehört (nach Tafel VI) das Antrittsgeld $a = 3.653$ oder der jährliche Beytrag $b = 0.377$. — Zehn Jahre nach dem Eintritte dieses Paares soll die Bilance der Gesellschaft gezogen werden. Da ist also in dem Bilancejahre der Mann unseres Paares 55 und die Frau 45 Jahre alt. Aber ein solches Paar, welches bey seinem Eintritte 55 und 45 Jahre zählte, müßte (nach derselben Tafel VI) das Antrittsgeld $a' = 3.794$ oder den jährlichen Beytrag $b' = 0.483$ für eine jährliche Pension von 1 Gulden entrichten. Da also das letzte Antrittsgeld $a' = 3.794$ jetzt, in dem Bilancejahre, eben so viel werth ist, als alle künftigen jährlichen Beyträge $b' = 0.483$ (die bis an das Ende der Ehe noch entrichtet werden sollen), eben jetzt werth sind, so wird man nun auch leicht finden können, wie viel die sämmtlichen künftigen jährlichen Beyträge $b = 0.377$, welche unser

in der That noch entrichten wird, schon jetzt werth sind.

Man hat nämlich die Proportion

Der jährl. Beytrag	ist jetzt werth	= also ist auch der jährl. Beytrag	jetzt werth
0.483	: 3.794	0.377	: x

Der gesuchte Werth aller noch künftigen jährlichen Beyträge unseres Paares ist also

$$x = \frac{(3.794)(0.377)}{0.483} = 2.96$$

Um uns daher zur besseren Uebersicht eine allgemeine Formel aufzustellen, nach welcher wir den gegenwärtigen Werth x der noch künftigen Beyträge eines jeden Paares bestimmen können, so wird man so verfahren. — Man suche in den Verzeichnissen des Instituts das Alter des Mannes und das der Frau bey ihrem Eintritte, und nehme die dafür gehörenden Zahlen a und b aus der Tafel VI. Dann vermehre man diese beyden Alter um die Zahl der Jahre, die seit dem Eintritte dieses Paares bis zu dem gegenwärtigen Bilancejahre verflossen sind, und suche für dieses fingirte ältere Paar ebenfalls die Zahlen a′ und b′ der Tafel VI. Hat man diese vier Zahlen, so ist sofort der gesuchte gegenwärtige Werth aller noch künftigen jährlichen Beyträge dieses Paares gleich.

$$x = \frac{a'}{b'} . b$$

für unser Paar ist $a = 3.653$
$b = 0.377$
$a' = 3.794$
$b' = 0.483$

also $x = 2.96$ wie zuvor. Wäre also die jährliche Pension dieses Paares 10 fl. oder 100 fl. so wäre $x = 29.6$ oder $x = 296$ fl. u. s. w.

Verfährt man eben so für alle übrigen Paare der Gesellschaft, und addirt dann alle diese Werthe von x in eine Summe,

so erhält man den gesuchten Werth II aller noch künftigen Beyträge der jetzt bestehenden Mitglieder des Institutes und dann ist

$$I + II$$

das gesuchte gegenwärtige Vermögen der Casse.

Bestimmung der Schuld der Casse.

Die ganze Schuld des Instituts oder das, was sie für ihre Einnahmen an die Mitglieder jetzt zu zahlen schuldig ist, besteht, wie gesagt, erstens in dem gegenwärtigen Werthe aller Pensionen, welche künftig das Institut an die bereits schon jetzt bestehenden Wittwen auszuzahlen hat. Allein der gegenwärtige baare Werth einer sochen Pension von 1 fl. jährlich, welche jede schon bestehende Wittwe von dem Bilancejahre bis an ihren Tod zu fordern hat, ist offenbar einerley mit dem gegenwärtigen Werthe einer eben so großen Leibrente für eine Person, die dasselbe Alter hat, welches die Wittwe in dem Bilancejahre hat. Ist also z. B. eine Wittwe in dem Bilancejahre 60 Jahre alt, so ist (nach Tafel III) der gegenwärtige Werth aller ihrer noch künftigen Bezüge gleich 7.771, wenn sie eine jährliche Pension von 1 fl., also auch gleich 777.1, wenn sie eine jährliche Pension von 100 fl. zu fordern hat u. s. Sucht man so die Werthe aller schon jetzt bestehenden Pensionen, und bringt sie in eine Summe, so erhält man den ersten Theil der gesuchten Schuld des Institutes, den wir III nennen wollen.

Zu der gesammten Schuld des Institutes müssen aber auch noch die gegenwärtigen Werthe aller künftigen Pensionen derjenigen Wittwen gezählt werden, deren Männer in dem Bilancejahre noch leben. Allein der Werth einer solchen Pension für ein bestimmtes Paar ist offenbar gleich dem Antrittsgelde a′, welches ein Paar erlegen müßte, das schon bey seinem Eintritte das Alter hätte, welches unser bestimmtes Paar erst in dem Bilance-

jahre hat. Ist also z. B. unser Paar mit dem Alter 45 und 40 eingetreten, und erfolgt das Bilancejahr 10 Jahre später, wo der Mann 55 und die Frau 50 Jahre hat, so ist für dieses Paar (nach Taf. VI) a′ = 3.174. Ist daher die künftige jährliche Pension dieses Paares 100 Gulden, so ist auch der gegenwärtige Werth dieser Pension gleich 317.4 Gulden. Verfährt man eben so für alle andern noch zusammenlebenden Paare der Gesellschaft, so erhält man den Werth aller noch künftigen Pensionen des Instituts, den wir durch IV bezeichnen wollen.

Wir haben also für das gesammte Vermögen des Institutes in dem Bilancejahre die Zahl I + II, und für die gesammte Schuld desselben in derselben Zeit die Zahl III + IV. Sind beyde Zahlen einander gleich oder doch sehr nahe gleich, so ist das Institut in gutem Stande, und keine wesentliche Veränderung desselben nothwendig. Ist aber die Schuld III + IV größer, als das Vermögen I + II, so sind die Einlagen der Mitglieder zu klein, oder was dasselbe ist, die Pensionen des Instituts zu groß. Jene müssen daher erhöht, oder diese erniedrigt werden, wenn das Institut ferner noch mit Sicherheit bestehen kann.

Das Einfachste ist immer die Erniedrigung der Pensionen, die sich jedes vernünftige Mitglied gefallen lassen wird, wenn ihm die Nothwendigkeit der Reform klar gemacht wird, da im Gegentheile bedeutende Erhöhungen der Einlagen nicht immer in der Willkühr der Mitglieder stehen, und viele derselben diese Zuzahlungen, vielleicht auch mit dem besten Willen, nicht leisten können. Gesetzt also, um das Ganze durch ein einfaches Beyspiel deutlich zu machen, man hätte gefunden, daß das gegenwärtige Vermögen der Casse I + II = 100000, und die gegenwärtige Schuld derselben III + IV = 250000 betrüge, so ist nicht, wie es seyn sollte, I + II = III + IV, sondern es ist nur

$$I + II = \frac{2}{5} . (III + IV)$$

oder das Vermögen der Casse ist nur $\frac{2}{5}$ der Schuld derselben, und daraus folgt, daß die bisherigen, viel zu großen Pensionen des Instituts mit $\frac{2}{5}$ multiplicirt werden müssen, um sie auf ihren wahren Werth herabzubringen, und daß also z. B. statt der bisherigen Pensionen von 100 fl. jährlich nur 40 fl. bezahlt werden müssen, vorausgesetzt, daß die noch lebenden Männer der Gesellschaft auch ferner noch ihre bisherigen jährlichen Beyträge unverändert fortzahlen. Allen bereits bestehenden und noch künftigen Wittwen wird daher von diesem Augenblicke an nur der zweyfünfte Theil ihrer bisherigen Pension ausgezahlt, und die künftig noch eintretenden neuen Paare werden nur auf diesen verbesserten neuen Zahlungsfuß angenommen, der, wie sich von selbst versteht, mit allen seinen Belegen der gesammten Gesellschaft öffentlich kund gemacht werden muß, ehe er in Anwendung gebracht werden kann.

Noch muß zum Schlusse dieses Gegenstandes erinnert werden, daß oben, bey der Bestimmung von II, vorausgesetzt wurde, daß die ganze Bilance kurz vor dem Abschlusse einer Jahresrechnung vorgenommen wurde, wo also der Termin nahe bevorsteht, in welchem die Mitglieder ihre neuen Beyträge zu entrichten haben. Wäre aber die Bilance gleich nach einer solchen Jahresrechnung angestellt worden, so muß man von dem dort gefundenen Werthe von x noch einen jährlichen Beytrag b subtrahiren. In diesem Falle ist für jenes Beyspiel, in welchem $b = 0.377$ ist,

$$x = 2.96 - 0.377 = 2.583, \text{ also allgemein}$$

$$x = \frac{a'}{b'} b - b.$$

Dieser bey einem einzelnen Paare meistens nur geringe Unterschied kann bey einer großen Anzahl von Mitgliedern sehr bedeutend werden, daher er nicht vernachlässigt werden darf. Aus diesem Grunde wurde auch (S. 80) gesagt, daß es vortheilhaft ist, die Zahlungen der Mitglieder sowohl, als die der Casse

an gewisse Tage des Jahres zu binden, nicht aber, wie es wohl sonst geschieht, dieselben an allen Tagen des Jahres ohne Unterschied vorzunehmen, wodurch auch der ämtliche Gang der Anstalt erschwert und das Personale der Verwaltung vermehrt oder doch ohne Noth mit nie unterbrochenen Geschäften überhäuft wird.

Achtes Capitel.

Verbesserung der bemerkten Fehler, oder, wo diese nicht angeht, Auflösung der Gesellschaft.

Es ist am Ende des vorhergehenden Capitels bemerkt worden, daß bedeutende Erhöhungen der Einlagen oder Verminderungen der Pensionen, vor der Ausführung dieser Abänderungen, den sämmtlichen Mitgliedern der Gesellschaft öffentlich bekannt gemacht und dieselben zur Annahme dieser Verbesserungen, ohne welche das Institut nicht bestehen kann, aufgefordert werden sollen. Da nämlich die Gesellschaft auf einen früheren Vertrag gegründet ist, so kann, wenn dieser Vertrag wesentlich geändert wird, kein Mitglied gezwungen werden, diese Aenderungen anzunehmen oder dieser neuen Gesellschaft unter ebenfalls neuen Bedingungen beyzutreten. Auch können, selbst ohne diese gewaltsamen Aenderungen der Statuten, einzelne Mitglieder in die Lage kommen, wo sie die mit dem Institute bey ihrem Eintritte eingegangenen Verbindungen nicht weiter zu erfüllen im Stände sind, ohne durch ihre Schuld zu diesem Unvermögen beygetragen zu haben. Ein Mitglied kann z. B. durch Unglücksfälle dahin gebracht werden, daß es seine, bisher durch viele Jahre regelmäßig entrichteten jährlichen Beyträge nicht mehr bezahlen kann, und es wäre, wenn nicht ungerecht, wenigstens sehr hart, ein solches Mitglied, selbst in Kraft vorhergegangener Beschlüsse, von der Gesellschaft auszuschließen, und, wie es in manchen Instituten geschieht, ihm selbst seine bisher bezahlten Einlagen gleichsam zur Strafe zurückzubehalten.

Es entsteht daher zuerst die Frage, was mit einem solchen Mitgliede geschehen soll, welches aus irgend einem hinreichenden Grunde, dessen Gültigkeit vor rechtlichen und billigen Menschen anerkannt werden muß, das Institut verlassen will.

Gesetzt dieser Mann hatte bey seinem Eintritte 30 und seine Frau 25 Jahre, so daß nach Taf. VI für ihn war $a = 2.937$ und $b = 0.248$. Nach 15 Jahren aber will oder muß er austreten. Hier ist er 45 und seine Frau 40 Jahre alt, und ein solches Paar, mit diesem Alter bey seinem Eintritte, hätte $a' = 3.194$ und $b' = 0.340$. — Der Mann war schuldig, der Casse bis an seinen Tod jährlich den Beytrag b zu geben. Um den gegenwärtigen Werth x aller dieser Beyträge zu finden, hat man aber (wie S. 99)

$$b' : a' = b : x.$$

also ist der gesuchte Werth seiner Beyträge

$$x = \frac{a'b}{b'}.$$

und eben so viel ist er also jetzt, bey seinem Austritte, der Casse schuldig. Dafür aber ist die Casse ihm das ganze Antrittsgeld a' schuldig, also muß ihm bey seinem Austritte die Casse herausgeben die Summe

$$S = a' - \frac{a'b}{b'}.$$

In unserem besonderen Beyspiele ist

$$S = 3.194 - 2.33 = 0.864$$

Beträgt also seine früher erkaufte Pension jährlich 10 oder 100 fl. so gibt ihm die Casse heraus 8.6 oder 86 fl. u. f.

Wollte er aber, statt diese Summe aus der Casse zu nehmen, sie als ein neues Antrittsgeld für eine kleinere Pension stehen lassen, so würde diese neue jährliche Pension (da a' Gulden Antrittsgeld die Pension 1 geben) gleich $\frac{S}{a'}$ seyn, oder in

unserm Beyspiele, $\frac{S}{a'} = \frac{0.864}{3.194} = 0.27$ also z. B. 27 fl. wenn seine frühere Pension 100 fl. war.

Auch hier muß, (wie S. 102) bemerkt werden, daß das Vorhergehende voraussetzt, daß der Austritt des Mitgliedes kurz vor der Zahlung eines seiner jährlichen Beyträge erfolgt. Tritt er kurz nach einer solchen Zahlung aus, so würde ihm die Casse die Summe herausgeben.

$$S' = S + b = a' - \frac{a'b}{b'} + b$$

oder in unserem Beyspiele

$$S' = 0.864 + 0.248 = 1.112$$

und wenn er diese Summe S' als Antrittsgeld für eine neue Pension stehen ließe, so würde diese Pension jährlich $\frac{S}{a'}$ oder 0.349 fl. betragen.

Auch setzt das Vorige voraus, daß der Mann bloß auf Contributionsfuß eingetreten sey. Ist er aber auf Capitalfuß eingetreten, so ist seine Abrechnung mit dem Institute noch viel einfacher. Der Mann hat nämlich bey seinem Eintritte das Capital $a = 2.937$ gezahlt. Wäre er mit dem Alter, welches er bey seinem Austritte hatte, eingetreten, so hätte er $a' = 3.194$ zahlen müssen, und diese letzte Summe $a' = 3.194$ soll ihm daher jetzt die Casse geben, während sie von ihm vor 16 Jahren die Summe $a = 2.937$ empfangen hat.

Doch muß bemerkt werden, daß solche Trennungen einzelner Mitglieder von der Gesellschaft nur aus den wichtigsten Gründen und höchst selten zugestanden werden dürfen, weil sie, wenn sie gewöhnlich und zahlreich werden, die Existenz des Instituts in Gefahr bringen.

Was hier von dem einzelnen Mitgliede gesagt worden, soll auch mit allen andern geschehen, wenn die bisherige Einrichtung der Gesellschaft so zweckwidrig gefunden wird, daß sie, ohne große Verwirrung und Unordnung, nicht mehr in einen besseren Zustand versetzt werden kann, d. h. wenn der gegenwärtige, auf Zerstörung führende Zustand der Gesellschaft nur durch die Auflösung derselben entfernt werden kann.

Sind die entdeckten Fehler des Instituts der Art, daß sie die Existenz desselben nicht unmittelbar gefährden, und daß sie, ohne die Statuten wesentlich zu ändern, verbessert werden können, so muß diese Verbesserung unverzüglich vorgenommen werden. Hieher gehören z. B. die oben gerügten Mängel der landesherrlichen Bestätigung, Unordnung in den Zeiten der Einnahmen und Ausgaben, Unsicherheit wegen dem Alter und der Gesundheit der eintretenden Mitglieder, Bevortheilungen einiger Mitglieder auf Kosten der andern u. dgl.

Werden aber solche Fehler entdeckt, die den Untergang der Gesellschaft unmittelbar nach sich ziehen, und die ohne gewaltsame Aenderung der Statuten nicht entfernt werden können, so wird es darauf ankommen, ob die Mitglieder sich diese Aenderungen gefallen lassen wollen oder müssen, oder ob das Gegentheil der Fall ist. Doch muß bemerkt werden, daß es, sobald Fehler dieser Art entdeckt werden, die unerläßliche Pflicht der Vorsteher der Anstalt ist, sie sofort bekannt zu machen, ihre eigenen oder ihrer Vorgänger Irrthümer offen zu gestehen, sich durchaus von keiner falschen Scham zurückhalten zu lassen, und die durch die Lage der Casse nothwendig gewordenen Aenderungen sogleich und unverzüglich vorzunehmen, weil diese Fehler mit jedem Tage wachsen und die bereits entstandene Unordnung immer größer, und endlich ganz unheilbar machen.

Man kann ohne Zweifel zur Haltung eines Vertrages, dessen Bedingungen wesentlich geändert werden, nicht gezwi

gen seyn. Wenn ich im Vertrauen auf die Verheißungen der Vorsteher eines Wittweninstitutes in dasselbe trete, und mir später gesagt wird, daß ich nur die Hälfte oder das Drittel der mir für meine Einlage versprochenen Pansion erhalten soll, so kann ich dadurch den Vertrag, den ich auf solche Bedingungen vielleicht nie geschlossen hätte, als aufgehoben betrachten, und meine Einlagen sammt ihren Zinsen von der Gesellschaft zurückfordern. Allein, wenn jene erste zweckwidrige Einrichtung, welche diese große Reduction der Pensionen herbeyführte, nicht das Werk eines absichtlich bösen Willens, was doch bey Anstalten dieser Art nie vorausgesetzt werden darf, sondern wenn sie nur die Folge von Unkenntniß oder Sorglosigkeit war, wie dieß bey so traurigen und leider nur zu gewöhnlichen Ereignissen beynahe immer der Fall seyn mag, so möchte jene Strenge in den Forderungen der einzelnen Mitglieder an das Institut weder zweckmäßig, noch auch billig heißen dürfen. Die Auflösung einer solchen Gesellschaft zerstört die Hoffnungen, vielleicht die letzten Hoffnungen so vieler Familien, die wohl auch mit weniger zufrieden gewesen, die auch mit kleinern Pensionen gerettet worden wären, und die nun dem äußersten Mangel Preis gegeben und völlig verlassen sind. Ein so trauriges Extrem muß daher, so lange es möglich ist, vermieden werden. — Dazu kömmt noch, daß der Einzelne das Institut nicht wie einen Unternehmer, der das Spiel auf seine eigene Gefahr und auf alle Fälle hin verbürgt, ansehen muß, sondern daß vielmehr die Gesammtheit aller Mitglieder als eine moralische Person zu betrachten ist, als eine Gesellschaft, in welcher zum allgemeinen Besten, und alles gemeinschaftlich getragen werden soll, und in welcher man endlich die Lasten sowohl als die Genüsse, die jeden Einzelnen erwarten, nach Grundsätzen über alle zu vertheilen sich bemüht hat, die man bey der Gründung des Institutes für verläßlich, vielleicht sogar für unfehlbar gehalten hat. Wenn nun plötzlich der ganz

unerwartete Fall eintritt, daß ein großer Theil der ausgelegten Capitalien, ohne Schuld des Instituts, verloren geht, oder daß eine verheerende Krankheit in einem Jahre so viele Männer hinweg nimmt, also dem Institute so viele neue Pensionen hinzufügt, als sonst im gewöhnlichen Laufe der Dinge in zehn und mehr Jahren nicht erwartet werden dürfen, und daß nun, aus diesen oder ähnlichen Ursachen, die bisher eingeführten Pensionen eine Verminderung erleiden müssen, wenn anders das Institut vor dem Untergange gerettet werden soll — wer wird nicht den kleinen Verlust, den er in der allgemeinen Bedrängniß erleidet, dem viel größeren Unglücke, das die Auflösung der wohlthätigen Anstalt über so viele Tausende von Hülflosen herbeyführen müßte, gern und willig zum Ofer bringen; wer wird endlich in seinem Unmuthe über unvorhergesehene Zufälle sogleich das Ganze verwüsten und die Zufluchtsstätte so vieler Wittwen und Waisen von Grund aus zerstören wollen, bloß weil sie nicht ganz so viel Schutz gewähren kann, als er oder andere sich anfangs davon versprochen haben? Was aber von Elementarereignissen und von äußern Unfällen aller Art gilt, warum soll es nicht auch von denjenigen Unfällen gelten, die eine in der besten Absicht unternommene, aber erst in der Folge unrichtig gefundene Berechnung nach sich zieht?

Auch ist der eigentliche Zweck des Institutes überhaupt nur eine angemessene Versorgung der Wittwen, also nicht sowohl irgend eine bestimmte und in ihrer Größe unabänderliche, sondern nur eine vernünftiger Weise mögliche Pension. Jedes Mitglied kann doch wohl für sich nur eine solche Pension ansprechen, bey welcher der fernere Bestand des Instituts möglich ist, aber keine solche, welche die Gesellschaft zerstört und welche, indem sie die ersten Wittwen übermäßig begünstiget, alle andern dem Mangel oder dem Hungertode übergibt. Wenn daher nach besserer Einsicht und reiferer Ueberlegung die Pensionen herabgesetzt werden müß-

sen, so sollen sie auch von den Mitgliedern ohne Widerstand angenommen werden, wenn sie anders den Zweck und die Existenz der Gesellschaft nicht gänzlich aufgeben wollen, den Fall ausgenommen, wo die Vorsteher der Anstalt durch ein eigennütziges oder ungerechtes Verfahren sich alles weiteren Vertrauens unwürdig gemacht haben.

Unter der Voraussetzung also, daß die Mitglieder die Verminderung der Pensionen annehmen, wird man, wenn die nach Cap. VII gezogene Bilance die Größe dieser Verminderung kennen gelehrt hat, dieselbe den bisher bestehenden Mitgliedern öffentlich bekannt machen, und von nun an diesen Verbesserungen gemäß verfahren. Alle noch künftig eintretenden Mitglieder aber müssen durchaus nur nach der neuen und als völlig verläßlich und tadelfrey erkannten Einrichtung in die Gesellschaft treten, und dürfen daher mit der bisher bestehenden Gesellschaft nicht vermengt werden, da bey der letzten vielleicht noch mehrere kleinere Unregelmäßigkeiten statt haben, die zwar nicht unmittelbar die Existenz des Instituts bedrohen, aber auch nicht ganz weggebracht werden können, ohne die frühere Einrichtung der Anstalt einer gänzlichen Aenderung, und gleichsam einer neuen Umstaltung zu unterwerfen. Die bisher bestehenden Mitglieder sollen also, mit den durch spätere Einsicht getroffenen Veränderungen, eine abgesonderte und geschlossene Gesellschaft bilden, die sich selbst erhält, und mit der neuen, unter neuen und ganz fehlerfreyen Bedingungen entstandenen Gesellschaft keine weitere unmittelbare Verbindung hat. Uebrigens hat man keine Ursache, sich von diesem Schritte, wenn er einmal nothwendig geworden ist, durch eine falsche Scham zurückhalten zu lassen, weil es erstens nicht schändlich, sondern rühmlich ist, seinen begangenen Fehler, nach Erhaltung besserer Einsicht, zu gestehen und zu verbessern, und weil zweytens leider nur zu viele der früheren Institute, die an ähnlichen Uebeln litten, mit ihrem Beyspiele vorangegangen sind.

Wenn aber diese Einwilligung der Mitglieder zur Verminderung der Pensionen nicht erhalten werden kann; wenn diese Verminderung so beträchtlich ist, daß sie der größte Theil der Gesellschaft, der sich von den innern Gründen dieser Veränderungen nicht überzeugen kann, mit Unwillen zurückstößt, und daß dadurch das Vertrauen der künftigen Mitglieder erschüttert und diese von dem Eintritte, selbst in die verbesserte Gesellschaft, abgehalten werden; wenn ferner die statutenmäßigen Einrichtungen des Instituts der Art sind, daß sie, ohne Aufhebung, keine eigentliche Verbesserung mehr leiden; wenn z. B. bisher bey der Aufnahme der Mitglieder schon durch eine längere Reihe von Jahren nur das Alter des Mannes, aber nicht auch das der Frau berücksichtiget wurde, oder wenn die zweyten und ferneren Ehen erlaubt sind, oder wenn die Wittwenpensionen auch auf die Kinder übergehen müssen u. dgl. dann kann die Gesellschaft vor einem schmähligen Untergange nur durch Auflösung gerettet werden, und diese muß, sobald jene Gebrechen des Instituts erkannt sind, ohne Verzug vorgenommen werden, weil die nachtheiligen Folgen dieser Fehler, die an sich selbst unverbesserlich sind, mit jedem Tage wachsen und das Unglück und die allgemeine Unzufriedenheit, welche mit einer solchen Auflösung verbunden ist, nur vergrößern können.

Die Auflösung der Gesellschaft besteht in der Zurückzahlung der Casse an die Mitglieder von dem, was jedes dieser Mitglieder zu fordern hat, oder wenn die Forderungen durch vorhergegangene Fehler nicht mehr ganz befriedigt werden können, in einer dem Vermögen der Casse und den Forderungen der Mitglieder angemessenen reducirten Zurückzahlung, wodurch dann alle früher eingegangenen gegenseitigen Verbindlichkeiten gelöst und die Mitglieder der Gesellschaft getrennt werden.

Um die Größe dieser Rückzahlungen zu bestimmen, müssen die bestehenden Mitglieder des Instituts unterschieden werden

Sie sind entweder noch in Ehe stehende Paare, oder sie sind Wittwen, die ihren Mann bereits durch den Tod verloren haben. Wittwer, die ihre Frauen verloren haben, kommen hier in keine Betrachtung, da (S. 88) mit dem Tode der Frau die Pension und mit ihr der Anspruch des Paares an das Institut erlischt.

Ein Mann, dessen Frau bey der Auflösung des Instituts noch lebt, wird ganz so behandelt, wie oben der Mann, der aus irgend einem rechtsgültigen Grund die Gesellschaft für sich allein verläßt. War nämlich zur Zeit seines Eintrittes in das Institut (nach Taf. VI) das Antrittsgeld a und der jährliche Beytrag b, und nennt man a′ und b′ dieselben Einlagen für ein anders Paar, wo beyde Theile um so viele Jahre älter sind, als zwischen dem Eintritte jenes Paares und der Auflösung des Instituts verflossen sind, so muß (S. 105) jenem Paare bey der Auflösung die Summe

$$S = a' - \frac{a'b}{b'}$$

von der Casse zurückgezahlt werden, wenn es auf Contributionsfuß eingetreten ist. Trat es aber auf Capitalfuß ein, so erhält es von der Casse die Summe a′ zurück.

Ex. Der Mann hatte bey seinen Eintritte 40 und seine Frau 30 Jahre, so ist (Taf. VI) a = 3.501 und b = 0.330. Tritt die Auflösung der Gesellschaft nach 10 Jahren ein, wo also der Mann 50 und die Frau 40 Jahre hat, so ist a′ = 3.806 und b′ = 0.433. Der Mann erhält daher von der Casse zurück

$$S = 3.806 - \frac{(3.806)(0.330)}{0.433} = 0.91$$

wenn er auf Contributionsfuß eingetreten ist, also z. B. 91 fl., wenn seine jährliche Pension 100 fl. betrug. Ist er aber auf Capitalfuß eingetreten, so erhält er a′ = 3.806 zurück, also z. B. 381 fl., wenn seine jährliche Pension 100 fl. betrug, vorausgesetzt, daß er auch in der That das Antrittsgeld oder den jährlichen

Beytrag an die Casse entrichtet habe, der durch die Taf. VI für eine jährliche Pension von 100 fl. bestimmt ist. Hat er aber in einem fehlerhaften Institute, in welchem die Pensionen zu hoch angesetzt wurden, z. B. nur die Hälfte, oder nur das Drittel jenes Antrittsgeldes oder jenes jährlichen Beytrags früher an die Casse gezahlt, so bekömmt er jetzt, bey der Auflösung derselben, auch nur die Hälfte oder das Drittel der oben gefundenen Summen von der Casse zurück.

Eine Frau aber, deren Mann bereits gestorben ist, oder eine schon bestehende Wittwe des Instituts, hat die ihr bereits zahlbare Pension auf Lebenszeit von der Casse zu fordern, ohne daß die letzte an sie irgend einen Anspruch hat. Der gegenwärtige Werth ihrer Pension ist aber, wie S. 100, gleich dem Werthe einer eben so großen Leibrente, nach dem Alter bestimmt, welches die Wittwe bey der Auflösung der Gesellschaft hat, und dieß ist daher auch ihre Foderung an die Casse. Ist also z. B. die Wittwe bey der Auflösung der Gesellschaft 40 Jahre alt, so erhält sie von der Kasse 11.833 fl. zurück, oder sie erhält, wenn ihre jährliche Pension 100 fl. beträgt, von der Casse 1183.3 fl. zurück, wieder vorausgesetzt, daß ihr Mann, so lange er lebte, den jährlichen Beytrag oder das Antrittsgeld auch in der That erlegt hat, welches durch die Taf. VI für eine Pension von 100 fl. bestimmt wird. Hat er nur den 2, 3, 4ten Theil dieser Einlagen gezahlt, so bekömmt sie auch nur den 2, 3, 4ten Theil jener Summe, oder 591.6, 394.4 oder 295.8 fl. u. s. w.

In allem Vorhergehenden wurde endlich vorausgesetzt, daß das noch übrige Vermögen der Casse auch in der That noch so groß ist, um alle diese Forderungen der Mitglieder zu befriedigen. Ist aber durch vorhergegangene Unglücksfälle, durch bereits ausgezahlte und zu große Pensionen u. s. ein Deficit der Casse entstanden, so ist diese nicht mehr vermögend, jenen Ansprüchen der Mitglieder genug zu thun.

In solchen Fällen, und sie werden leider die gewöhnlichsten seyn, muß daher der Auflösung der Gesellschaft eine genaue Bilance der Casse vorhergehen, die man nach den im VII. Cap. erklärten Vorschriften vornehmen wird. Nennt man dann A das gegenwärtige Vermögen der Casse, welches wir dort durch I + II bezeichnet haben, und nennt man B die Summe aller Forderungen der Mitglieder, der noch in Ehe stehenden sowohl, als der Wittwen, wie sie nach den so eben gegebenen Regeln für jedes einzelne Paar gefunden werden, so soll, wenn die Casse kein Deficit hat, A gleich B seyn. Wäre aber z. B. das gegenwärtige Vermögen der Casse A = 140000 und ihre an die Mitglieder abzutragende Schuld B = 420000 so ist A gleich ⅓ B, oder jedes Mitglied kann von den, oben für dasselbe berechneten Zurückzahlungen nur den dritten Theil erhalten, weil mehr zu zahlen die Casse außer Stande ist. Zwar könnte man von den bereits bestehenden Wittwen wegen ihren schon erhaltenen zu großen Pensionen wieder einen Theil zurückfordern, um das Vermögen der Casse zu vermehren. Aber diese Vermehrung wird erstens wohl nur gering, und sie wird zweytens auch unbillig und lieblos seyn, da man diese Ersparungen an armen Unglücklichen machen will; da jedes noch lebende Paar der Gesellschaft dieselben Hoffnungen auf jene bessere Versorgung und dieselben Ansprüche darauf unterhielt; da jene verlassenen Wittwen keine Schuld an den Irthümern des Institutes tragen, und da endlich rückwirkende Verfügungen solcher Art keiner, am wenigsten aber einer wohlthätigen Versorgungsanstalt anstehen.

Anhang.

Zusammenfassung der vorzüglichsten Momente der vorhergehenden Capitel.

Um in einer so wichtigen Sache, als die Versorgung hülfloser Wittwen und unmündiger Waisen ist, nichts dem Zufalle zu überlassen und auch diejenige Classe von Lesern zu berücksichtigen, die das Vorhergehende genauer zu betrachten entweder keine Zeit oder keine Lust haben, werde ich das, worauf es bey der Gründung und Beurtheilung solcher Institute besonders ankömmt, hier kurz zusammenstellen. Manche von diesen Lesern besitzen vielleicht, wenn auch nicht eine vollständige Kenntniß des Gegenstandes, doch guten Willen und hinlänglichen Einfluß in der bürgerlichen Gesellschaft, um selbst Gründer oder doch Beförderer solcher wohlthätigen Anstalten zu werden, und viele von den anderen sind gewiß in der Lage, ihr Vermögen, wenn sie es einem solchen Institute anvertrauen wollen, auch zum wahren Besten ihrer Familie zweckmäßig verwendet zu wünschen. Beyden kann es nicht anders als willkommen seyn, hier kurz und ohne Mühe alles das gesammelt zu finden, was zur Einrichtung neuer und zur Prüfung alter Institute dieser Art nothwendig ist. Zur bequemeren Uebersicht endlich werde ich die vorzüglichsten der hier zu betrachtenden Puncte als eben so viele Probleme oder Fragen aufstellen.

Zeitrenten.

I. Probl. Wenn ich eine bestimmte Summe für eine bestimmte Anzahl Jahre auf Zinsen und Zinseszinsen ausleihe, wie viel ist man mir am Ende dieser Jahre zu geben schuldig?

Aufl. Man multiplicire die ausgeliehene Summe mit der

Zahl der zweyten Columne der Tafel II, die neben der gegebenen Anzahl Jahre steht. Das Product ist der gesuchte Werth jener Summe nach der gegebenen Anzahl von Jahren. Hier und im Folgenden werden immer 5 pr.C. vorausgesetzt.

Ex. Ich lieh 5000 fl. auf zehn Jahre aus, also beträgt dieses Capital am Ende des zehnten Jahres 5000 (1.62869 46268) oder 8144.473134 fl. oder nahe 8144½ fl. (S. 26).

II. Probl. Nach einer gegebenen Anzahl Jahren will ich von meinem Schuldner eine gegebene Summe zu fordern haben: wie viel muß ich ihm dafür jetzt als Kapital auf Zinseszinsen leihen?

Aufl. Man multiplicire die geforderte Summe mit der entsprechenden Zahl der dritten Columne der Tafel II. Das Product ist das gesuchte, jetzt auszuleihende Capital.

Ex. Wenn ich von meinem Schuldner nach 10 Jahren 10000 fl. fordern will, so muß ich ihm jetzt geben

10000 (0.6139132535)

oder 6139.132535 fl. (S. 27).

III. Probl. Welches Capital muß ich jetzt anlegen, damit mir der Schuldner dafür durch eine gegebene Zeit jährlich eine gegebene Summe (als Jahrrente oder Zeitrente) geben kann?

Aufl. Man multiplicire die Zeitrente mit der entsprechenden Zahl der vierten Columne der Taf. II. Das Product ist das gesuchte Capital.

Ex. Ich will durch 10 Jahre jährlich eine Zeitrente von 100 fl. haben, also muß ich dafür das Capital anlegen

100 (7.7217349291)

oder nahe 772.17 fl. (S. 29). Es ist für sich klar, daß der Schuldner am Ende des 10. Jahres dem Gläubiger nichts mehr schuldig ist, und daß der erste das erhaltene Capital nicht mehr zurückzuzahlen hat, weil er es nämlich sammt Zinsen und Zinses-

zinsen schon durch die jährliche Entrichtung der Zeitrente an den Gläubiger zurückgezahlt hat.

IV. Probl. Ich will mit einen bestimmten Capital auf eine bestimmte Anzahl Jahre eine Zeitrente kaufen. Wie groß wird diese jährliche Zeitrente seyn?

Aufl. Man dividire das Capital mit der entsprechenden Zahl der vierten Columne der Tafel II. Der Quotient ist die gesuchte Zeitrente?

Ex. Wenn ich mit dem Capital von 1000 fl. eine Zeitrente auf zwanzig Jahre kaufen will, so werde ich dafür eine 20jährige Zeitrente erhalten, die mir jährlich mit

$$\frac{1000}{12.4622103425} \text{ oder mit } 80.243 \text{ fl.}$$

ausgezahlt wird. (S. 29).

Leibrenten.

V. Probl. Welches Capital muß ich jetzt anlegen, damit mir der Schuldner dafür jährlich, so lange ich lebe, eine bestimmte Summe (als Leib- oder Lebensrente) geben kann?

Aufl. Man multiplicire die bestimmte Leibrente durch die dem Alter des Capitalisten entsprechende Zahl der vierten Columne der Taf. III. Das Product ist das gesuchte Capital.

Ex. Wenn ein 30jähriger Mann eine Leibrente, die ihm jährlich mit 100 fl. bis an seinen Tod ausgezahlt wird, kaufen will, so muß er dafür jetzt das Capital

100 (13.3500)

oder 1335 fl. geben. Ein 60jähriger Mann wird dieselbe Leibrente von 100 fl. schon mit dem Capital 100 (7.7714) oder mit 777.14, und ein 90jähriger Mann mit 223.51 erkaufen können (S. 35).

Dieß setzt voraus, daß das Capital zu 5 pr.Ct. ausgeliehen werde, für 4 oder 3pC. wird man die Zahlen der dri

ten oder zweyten Columne der Tafel III brauchen. — Daß endlich auch hier, wie bey den Zeitrenten, das Capital dem Käufer bleibt, und nicht mehr zurück gegeben wird, ist für sich klar.

VI. Probl. Welche Leibrente wird ein Mann von einem gegebenen Alter für ein bestimmtes Capital erhalten?

Aufl. Man dividire das Capital durch die entsprechende Zahl der Tafel III. Der Quotient ist die gesuchte Größe der Leibrente.

Ex. Ein 60jähriger Mann gibt 800 fl. Capital auf Leibrenten, also erhält er dafür jährlich

$$\frac{800}{7.7714} = 102.94 \text{ Gulden (S. 35).}$$

Wittwenpensionen.

VII. Probl. Ein gegebenes Ehepaar tritt in ein Wittweninstitut bloß auf Capitalfuß (S. 5) mit einem gegebenen Antrittsgelde: welche jährliche Wittwenpension wird es dadurch begründen?

Aufl. Das Antrittsgeld, durch die Zahl a der Tafel VI dividirt, gilt die gesuchte Pension.

Ex. Der Mann sey bey seinem Eintritte 40 und die Frau 30 Jahre alt, so ist (Taf. VI) a = 3.501. Erlegt der Mann das Antrittsgeld 500 fl., so ist die jährliche Pension gleich

$$\frac{500}{3.501} = 142.9 \text{ oder } 142\tfrac{9}{10} \text{ Gulden.}$$

Note. Die Hälfte dieses Antrittsgeldes würde auch die Hälfte dieser Pension, und das Doppelte dieses Antrittsgeldes auch das Doppelte dieser Pension zur Folge haben u. s. So gibt das Antrittsgeld 250 die Pension 71.45, und das Antrittsgeld 1000 fl. die Pension 285.8 fl. u. s. w. — Hier und im Folgenden wird vorausgesetzt, daß das Institut seine Capitalien zu 5 pr.Ct. verzinset. Wenn es aber dieselben zu 4 oder zu 3 pr.Ct.

ausleiht, so wird man die Zahlen a und b aus der Taf. IV oder V nehmen, und wie zuvor verfahren.

VIII. Probl. Ein gegebenes Ehepaar tritt auf Capitalfuß ein, und wünscht eine bestimmte Pension. Welches Antrittsgeld muß dieses Paar bey seinem Eintritte in die Gesellschaft entrichten?

Aufl. Das gesuchte Antrittsgeld ist gleich der gegebenen Pension multiplicirt in die Zahl a der Taf. VI.

Ex. Der Mann sey 60 und die Frau 45 Jahre, und die gewünschte Pension 200 fl. — Hier ist a = 4.513 also das gesuchte Antrittsgeld gleich 902.6.

Für eine zwey, dreymal größere Pension wird auch das Antrittsgeld zwey, dreymal größer genommen u. s.

IX. Probl. Ein gegebenes Ehepaar tritt bloß auf Contributionsfuß (S. 5) mit einem gegebenen jährlichen Beytrag ein: welche Pension wird es dadurch begründen?

Aufl. Der gegebene jährliche Beytrag, dividirt durch die Zahl b der Tafel VI gibt die gesuchte Pension.

Ex. Ist der Mann bey seinem Eintritte 55 und die Frau 20 Jahre, und der jährliche Beytrag 30 fl., so ist die Pension gleich

$$\frac{30}{0.739} = 40.6.$$

X. Probl. Ein gegebenes Ehepaar tritt bloß auf Contributionsfuß ein, und wünscht eine bestimmte Pension: wie groß muß der jährliche Beytrag dieses Paares seyn?

Aufl. Die gegebene Pension, multiplicirt durch die Zahl b der Tafel, gibt den gesuchten jährlichen Beytrag.

Ex. Ist der Mann 35 und die Frau 50 Jahre, und die gewünschte Pension 300 fl., so ist der gesuchte jährliche Beytrag 300 (0.1777) = 53.3 fl.

XI. Probl. Ein gegebenes Paar tritt zum Theil auf Capital- und zum Theil auf Contributionsfuß, also auf dem sog.

nannten gemischten Fuß ein. Das Antrittsgeld und der jährliche Beytrag dieses Paares ist gegeben: welche Pension begründet das Paar durch diese Einlagen?

Aufl. Man dividire das Antrittsgeld durch die Zahl a, und den jährlichen Beytrag durch die Zahl b der Tafel VI, die Summe beyder Quotienten, ist die gesuchte Pension.

Ex. Der Mann sey 40 und die Frau 25 Jahre; ihr Antrittsgeld 100 fl. und ihr jährlicher Beytrag 20 fl. Hier ist also a = 3.901 und b = 0.358.

Aber 100 dividirt durch 3.901 gibt 25.6
20 dividirt durch 0.358 gibt 55.9
also die gesuchte Pension 81.5.

XII. Probl. Pension und Antrittsgeld ist gegeben: man suche den entsprechenden jährlichen Beytrag.

Aufl. Man dividire das Antrittsgeld durch die Zahl a der Tafel, subtrahire den Quotienten von der Pension, und multiplicire diese Differenz durch die Zahl b der Tafel: das Product ist der gesuchte jährliche Beytrag.

Ex. Der Mann sey 30 und die Frau 15 Jahre, und das Antrittsgeld und die Pension sey gleich 1000 fl. Hier ist a = 3.553 und b = 0.285, also jener Quotient 281.5 dieß von 1000 subtrahirt gibt die Differenz 718.5, und diese Zahl durch 0.285 multiplicirt gibt den gesuchten jährlichen Beytrag 204.8 fl.

XIII. Probl. Pension und jährlicher Beytrag ist gegeben: man suche das entsprechende Antrittsgeld.

Aufl. Man dividire den jährlichen Beytrag durch die Zahl b der Tafel, subtrahire den Quotienten von der Pension, und multiplicire diese Differenz durch die Zahl a der Tafel; das Product ist das gesuchte Antrittsgeld.

Ex. Für das Paar des vorhergehenden Problems XII ist jener Quotient 204.8 dividirt durch 0.285 oder 718.6; diese Zahl von 1000 subtrahirt, gibt die Differenz 281.4, und diese

Differenz durch 3.553 multiplicirt, gibt das Antrittsgeld 999.8 oder nahe 1000 fl. wie zuvor.

XIV. Probl. Wie kann man prüfen, ob in einem Institute das Verhältniß der Einlagen der Mitglieder zu den ihnen versprochenen Pensionen bey jedem eintretenden Paare richtig bestimmt worden ist?

Aufl. Da man das Antrittsgeld und den jährlichen Beytrag kennt, welchen die Anstalt von den Paaren fordert, so wird man daraus die wahre Pension berechnen können, welche das Institut diesen Paare geben soll.

Tritt nämlich das Paar bloß auf Capitalfuß, oder tritt es auf Contributionsfuß, oder tritt es endlich auf gemischten Fuß ein, so wird man die gesuchte wahre Pension im ersten Falle nach Probl. VII, im zweyten nach Probl. IX, und im dritten nach Probl. XI bestimmen.

Stimmt dann die so berechnete Pension mit der Pension des Instituts nahe überein, so ist das gesuchte Verhältniß richtig bestimmt worden. Ist aber die Pension des Instituts kleiner als die berechnete, so verlieren alle Wittwen, da sie zu wenig erhalten, und die Casse gewinnt, was nicht seyn soll; sind endlich die Pensionen des Instituts größer als die berechneten, so gewinnen wohl die ersten Wittwen, aber nur auf Kosten der folgenden, deren Männer später sterben, die Casse aber verliert, und das Institut muß desto eher zu Grunde gehen, je größer die Pensionen desselben gegen die oben berechneten wahren sind.

XV. Probl. Wie kann man durch eine einzige einfache Rechnung prüfen, ob in einem Institute die Wittwenpensionen richtig bestimmt worden sind?

Aufl. Mit dem bekannten Antrittsgelde und dem bekannten jährlichen Beytrag, den das Institut von demjenigen Paare fordert, von dem der Mann bey seinem Eintritte 44 und die Frau 36 Jahre alt ist, suche man nach dem Probl. VII oder IX

oder XI die wahre Pension, und vergleiche diese mit der Pension des Instituts.

Für dieses Paar hat man aus

	Taf. IV zu 3 p. C.	Taf. V zu 4 p. C.	Taf. VI zu 5 p. C.
Antrittsgeld a . .	5.09	4.16	3.45
Jährlicher Beytrag b	0.436	0.397	0.366

Ex. I. In einem Institute wird bloß auf Capitalsfuß eingetreten, und das Paar, von dem der Mann 44 und die Frau 36 Jahre alt ist, erlegt das Antrittsgeld 100 fl. und erhält dafür die Pension von jährlich 50 fl.

Hier ist nach Probl. VII die wahre Pension gleich $\frac{100}{3.45}$ oder nahe 29 fl., also die Institutspension um 21 fl. zu groß. Bey hundert solchen Wittwen hat daher die Casse in zehn Jahren einen Schaden von 21000 fl.

Ex. II. In einem anderen Institute wird bloß auf Contributionsfuß eingetreten, und unser Paar erlegt jährlich 30 fl. wofür es eine Pension von 200 fl. erhalten soll.

Hier ist nach Probl. IX die wahre Pension gleich $\frac{30}{0.366}$ oder 82 fl. also die Institutspension 118 fl. zu groß. Bey hundert solchen Wittwen hat daher die Casse in zehn Jahren einen Schaden 118000 fl.

Ex. III. In einem dritten Institute wird auf gemischten Fuß eingetreten und unser Paar erlegt das Antrittsgeld 550 und überdieß den jährlichen Beytrag von 32 fl. und erhält dafür eine Pension von 600 fl.

Hier ist nach Probl. XI der erste Theil der wahren Pension $\frac{550}{3.45}$ oder 159, und der zweyte Theil $\frac{32}{0.366}$ oder 87, also :e ganze wahre Pension 246 fl. Die Institutspension ist daher

um 354 fl. zu groß, und bey hundert solchen Wittwen hat die Casse in zehn Jahren einen Schaden von 354000 fl.

Der auf diese Art gefundene Verlust der Casse bey diesem mittleren Paare ist zugleich der mittlere Verlust, welchen die Casse im Durchschnitte bey allen seinen Paaren leidet, weil, was die älteren Paare etwa weniger schaden, von den jüngeren wieder eingebracht wird. Bey allem Vorhergehenden wird übrigens vorausgesetzt, daß die jährlichen Beyträge vorschußweise, also der erste derselben gleich bey dem Eintritte erlegt und bis zu dem Tode des Mannes ununterbrochen fortgesetzt werden; daß die Wittwe selbst keine weiteren Beyträge zu leisten habe; daß die Auszahlung der Pension durch eine zweyte oder dritte Ehe der Wittwe nicht unterbrochen werde und daß endlich bey dem Tode der individuellen Wittwe, für welche die Pension gekauft worden ist, diese Pension selbst gänzlich aufhöre, und weder auf eine künftige Frau desselben Mannes, noch auf die Kinder dieser Familie übergehen könne, weil eine solche Uebertragung der Pensionen auf andere Personen dem ganzen Geiste einer Wittwenanstalt zuwider und durchaus unzulässig ist.

Anmerkungen.

1) Um schon hier eine angemessene Bezeichnung einzuführen, und dadurch in den folgenden Anmerkungen den mit den ersten Gründen der Algebra nicht unbekannten Lehrer eine allgemeine Uebersicht der verschiedenen hieher gehörenden Entwicklungen zu geben, wollen wir die Zahl der Columne A, welche zu einem gegebenen Alter n der ersten Columne gehört, durch das Zeichen A_n, die nächstfolgende durch A_{n+1}, die dieser nächstfolgende Zahl durch A_{n+2} u. s. w. ausdrücken, so daß z. B. wenn von zwanzigjährigen Personen die Rede ist, die von diesem Alter zusammen lebenden $A_{20} = 491$, die nach einem Jahre noch lebenden $A_{21} = 486$, die nach zwey Jahren noch zusammen lebenbenden $A_{22} = 481$ u. s. w. seyn sollen. Dieselbe Bezeichnung wollen wir auch für die übrigen Columnen annehmen, so daß z. B. $B_2 = 43$, $B_3 = 25$, $C_3 = 26577$ ist u. s. w. Dieses vorausgesetzt, ist jede Zahl B_n der Columne B gleich $A_n - A_{n+1}$, und jede Zahl C_n der Columne C gleich

$$A_n + A_{n+1} + A_{n+2} + A_{n+3} + \dots$$

welche Reihe bis zu dem letzten Gliede der Columne A fortgesetzt wird, weil, wie S. 12 erinnert wurde, die Zahlen der Columne B die Differenzen der zwey nächsten Zahlen der Columne A, und weil die Zahlen der Columne C die Summen der Zahlen in A von unten auf addirt sind. Der Kürze wegen kann man noch die Reihe $A_n + A_{n+1} + A_{n+2} + A_{n+3} + A_{n+4} \dots$ durch das Zeichen $S.A_n$ ausdrücken, so daß also jede Zahl C_n der Columne C gleich $S.A_n$ ist.

Aus dieser Bezeichnung folgt sofort, daß die mittlere Lebensdauer eines Menschen von n Jahren oder die Zahl der Columne F (S. 13) durch den Ausdruck gegeben wird

$$F_n = \frac{A_{n+1} + A_{n+2} + A_{n+3} + \dots}{A_n} + \frac{1}{2} \text{ oder } \frac{S.A_{n+1}}{A_n} + \frac{1}{2}$$

oder endlich $\frac{C_{n+1}}{A_n}$.

Nennt man ferner r den Zinsfuß, also r = 1,05 für 5 pCt., oder r = 1.04 für 4 pCt. u. s., so sind nach (S. 15) die Zahlen der Columne D gleich

$$D_n = \frac{A_n}{r^n}$$

wo n und A die zwey einander gegenüberstehenden Zahlen der zwey ersten Columnen sind, also z. B. für das zwanzigste Jahr

$$D_{20} = \frac{A_{20}}{r^n} = \frac{491}{(1.05)^{20}} = 185.05273,$$

da, wie bereits S. 15 erinnert wurde, die rechts oben stehende kleinere Ziffer in $(1.05)^{20}$ anzeigt, daß 1.05 zwanzigmahl mit sich selbst multiplicirt werden soll.

Da endlich die Zahlen der Columne E (nach S. 16) die Summen der Zahlen in D von unten addirt sind, so ist jede Zahl dieser Columne E gleich

$$E_n = \frac{A_n}{r^n} + \frac{A_{n+1}}{r^{n+1}} + \frac{A_{n+2}}{r^{n+2}} + \frac{A_{n+3}}{r^{n+3}} +$$

wofür man wieder abkürzend $E_n = S \cdot \frac{A_n}{r^n}$ setzen kann.

Diese Ausdrücke werden uns in der Folge sehr nützlich seyn, doch werde ich mich ihrer nur in den Noten bedienen, um den Text für die mit der Algebra Unbekannten verständlich zu erhalten.

2) Kürzer läßt sich das Vorhergehende so ausdrücken. Ist k das gegenwärtige angelegte Capital, und x der Werth desselben nach m Jahren, so hat man für den Zinsfuß r die Gleichungen

$$x = k \cdot r^m \quad \text{also auch} \quad k = \frac{x}{r^m}.$$

Die erste dieser Gleichungen beantwortet die erste, und die andere die zweyte der oben aufgestellten Fragen, und zwar allgemein für jeden Zinsfuß r und für jede Anzahl m von Jahren, während jene beyden Columnen der Tafel II nur auf 100 Jahre und auf den unter uns üblichen Zinsfuß r = 1.05 eingeschränkt sind. Man sieht, daß die zweyte Columne dieser Tafel die Werthe von $(1.05)^m$, und die dritte die Werthe von $\frac{1}{(1.05)^m}$ enthält.

3) Um den Grund dieses Verfahrens einzusehen, und die Aufgabe selbst allgemein aufzulösen, kann man die jährliche Rente R als die jährlichen Zinsen eines Capitals K betrachten, wenn das letzte nur auf einfache, nicht auf Zinseszinsen, ausgelegt wird. Da bey a pCt. zwischen dem Capital K und dem Interesse R immer die Gleichung Statt hat $K = \frac{100}{a} \cdot R$, so würde der, welcher dieses Capital K erlegt, das jährliche Interesse oder die Rente R, und überdieß nach Ablauf der m Rentenjahre noch jenes

Capital K selbst zurück erhalten. Statt dieser Zurücknahme des Capitals am Ende der Rentenjahre kann er aber auch jetzt schon den auf eben so viele Jahre zurück discontirten Werth des Capitals K, d. h. also (nach S. 15) die Größe $\frac{K}{r^m}$ davon abziehen, wodurch er für den wahren gegenwärtigen Werth Z seiner m jährigen Rente erhält

$$Z = k - \frac{k}{r^m}$$

oder da $K = \frac{100}{a} R$ war, $Z = \frac{100}{a} R \left(1 - \frac{1}{r^m}\right)$. Für den besondern Fall a = 5 pCt. ist $W = 20\ R \left(1 - \frac{1}{r^m}\right)$, welche Gleichung die im Texte gegebene Vorschrift enthält. — Ueberhaupt aber ist für jeden Zinsfuß $\frac{100}{a} = \frac{1}{r-1}$, also auch allgemein, wenn man diesen Werth von a in der vorhergehenden Gleichung substituirt, der Werth Z einer m jährigen Rente R gleich

$$Z = \frac{R\ (r^m - 1)}{r^m\ (r - 1)}$$

aus welcher Gleichung jede der vier Größen Z, r, R und m gefunden werden kann, wenn die drey anderen gegeben sind. Für $m = \infty$ ist $Z = \frac{R}{r-1} = \frac{100}{a} R = K$ oder für immerwährende Renten ist der Werth der Rente gleich dem Grundcapital selbst, wie es für sich klar ist.

4) Es ist nämlich (S. 15) jede Zahl der dritten Columne gleich $\frac{1}{r^m}$, also ihre Summe mit allen ihr vorhergehenden Zahlen gleich

p. 29

$$\frac{1}{r^m} + \frac{1}{r^{m-1}} + \frac{1}{r^{m-2}} \ldots + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r},$$

eine geometrische Reihe, deren Summe bekanntlich gleich

$$\frac{r^m - 1}{r^m\ (r - 1)}$$

ist. Dieser Ausdruck ist aber derselbe, welcher in der vorhergehenden Note mit R multiplicirt wurde, um den Werth der m jährigen Zeitrente zu erhalten. Man kann daher übereinstimmend mit der Bezeichnung der S. 124, die Zahlen dieser vierten Columne durch $S . \frac{1}{r^m}$ ausdrücken, während die der dritten $\frac{1}{r^m}$

und die der zweyten gleich r^m sind. Daraus folgt zugleich, daß der Werth einer Rente R für m Jahre gleich $Z = R \, . \, S \, . \, \frac{1}{r^m}$ ist.

5) Sey R′ die halbjährige Rente und r′ der Zinsfuß für halbjährige Zahlungen, also $r' = r^{\frac{1}{2}}$, so ist der Werth aller Renten in 2m halben Jahren gleich

p. 70

$$\frac{R'}{r'} + \frac{R'}{r'^2} + \frac{R'}{r'^3} \ldots + \frac{R'}{r'^{2m}} = \frac{R'\left(1 - \frac{1}{r'^{2m}}\right)}{r' - 1}$$

$$= \frac{R'}{r' - 1} \, . \left(1 - \frac{1}{r^m}\right)$$

und da dieser Ausdruck nach der vorletzten Anmerkung gleich $\frac{R}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r^m}\right)$ seyn soll, so ist

$$R' = \frac{r^{\frac{1}{2}} - 1}{r - 1} \, . \, R.$$

Sind eben so die Zahlungstermine $\frac{1}{n}$tel des Jahres, so hat man

$$R' = \frac{r^{\frac{1}{n}} - 1}{r - 1} \, . \, R.$$

Für $r = 1.05$ und $n = 2$ ist $\frac{r^{\frac{1}{n}} - 1}{r - 1} = 0.4939$, wie im Texte.

6) Man sieht daraus, daß man den Werth einer Lebensrente von einem Gulden jährlich, kürzer so ausdrücken kann,

p. 75

$$L = \frac{\frac{A_{n+1}}{r} + \frac{A_{n+2}}{r^2} + \frac{A_{n+3}}{r^3} + \ldots}{A_n}$$

und dieser Ausdruck kann auch so gegeben werden.

$$L = \frac{\frac{A_{n+1}}{r^{n+1}} + \frac{A_{n+2}}{r^{n+2}} + \frac{A_{n+3}}{r^{n+3}} + \ldots}{\frac{A_n}{r^n}}$$

das heißt also (nach der Anmerkung S. 125)

$$L = \frac{E_{n+1}}{D_n} \text{ wie oben.}$$

7) Ist nämlich m das gemeinschaftliche Alter der Männer und n das der Frauen bey ihrem Eintritte in die Gesellschaft, so wird die Anzahl der noch bestehenden Ehen nach x Jahren seyn

p. 41.

$$\frac{A_{m+x} \cdot A_{n+x}}{A_m}.$$

8) Nach dem Gesagten ist also der Werth E einer Ehrente, die jährlich mit einem Gulden bezahlt wird, wenn m und n das Alter des Mannes und der Frau, und r den Zinsfuß bezeichnet,

p. 42.

$$E = \frac{1}{A_n} \cdot \left[\frac{A_{m+1} \cdot A_{n+1}}{r \cdot A^m} + \frac{A_{m+2} \cdot A_{n+2}}{r^2 \cdot A_m} + \frac{A_{m+3} \cdot A_{n+3}}{r^3 \cdot A_m} + \ldots\right]$$ oder

$$E = \frac{1}{A^m \cdot A^n}\left[\frac{A_{m+1} \cdot A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2} \cdot A_{n+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3} \cdot A_{n+3}}{r^3} + \ldots\right].$$

Man kann diesen Ausdruck auch kürzer so finden. Da von 112 siebenzigjährigen nach einem Jahre noch 103 leben, so ist auch für jeden einzelnen siebenzigjährigen die Wahrscheinlichkeit, daß er noch ein Jahr lebe, gleich $\frac{103}{112}$, und eben so, daß er noch zwey Jahre lebe, $\frac{94}{112}$, daß er noch drey Jahre lebe $\frac{85}{112}$ u. s. Ueberhaupt also ist die Wahrscheinlichkeit, daß

	ein Mensch von m Jahren		ein Mensch von n Jahren
nach 1 Jahr noch lebe	$\frac{A_{m+1}}{A_m}$	. . .	$\frac{A_{n+1}}{A_n}$
2 — — —	$\frac{A_{m+2}}{A_m}$	. . .	$\frac{A_{n+2}}{A_n}$
3 — — —	$\frac{A_{m+3}}{A_m}$	. . .	$\frac{A_{n+3}}{A_n}$

Die Wahrscheinlichkeit aber, daß beyde Ereignisse zusammen Statt haben, oder daß beyde Menschen zugleich leben, ist, nach den ersten Gründen der Probabilitätsrechnung, gleich dem Producte jener beyden Wahrscheinlichkeiten, also ist auch die Wahrscheinlichkeit, daß diese beyden Personen von m und n Jahren

noch 1 Jahr zusammen leben, gleich $\frac{A_{m+1} \cdot A_{n+1}}{A_m \cdot A_n}$

noch 2 Jahre zusammen leben, gleich $\frac{A_{m+2} \cdot A_{n+2}}{A_m \cdot A_n}$

3 — — — — — $\frac{A_{m+3} \cdot A_{n+3}}{A_m \cdot A_n}$ u. s.

woraus der vorhergehende Ausdruck von E sofort folgt.

9) Um das ganze Verfahren dieser Berechnung einer Wittwenrente hier analytisch darzustellen, so hatte man (Seite 127 und 128

$$E = \frac{1}{A_m A_n}\left[\frac{A_{m+1} \cdot A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2} \cdot A_{n+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3} \cdot A_{n+3}}{r^3} + \ldots\right] \text{ und}$$

$$L = \frac{A_n}{1}\left[\frac{A_{n+1}}{r} + \frac{A_{n+2}}{r^2} + \frac{A_{n+3}}{r^3} + \ldots\right]$$

Substituirt man diese Werthe von E und L in der vorhergehenden Gleichung

$$W = L - E$$

so erhält man den gesuchten Werth von W.

Wollte man aber nebst dem Antrittsgelde W auch noch einen jährlichen nachträglichen Beytrag von B Gulden geben (also nach S. 5, auf Capital- und Contributions-Fuß zugleich eintreten) so wird, da dieser Beytrag nur während der Zeit der Ehe dauert, der Werth aller dieser Beyträge auf die Zeit des Eintritts zurück discontirt, gleich BE seyn, und man wird daher W + BE statt W in der letzten Gleichung setzen müssen, wodurch man erhält

$$W = L - (1 + B) E$$

und diese Gleichung gibt das Antrittsgeld W, wenn die Größe des jährlichen Beytrags B, oder sie gibt den jährlichen Beytrag B, wenn das Antrittsgeld W bekannt oder als gegeben angenommen ist. Tritt man bloß durch jährliche Beyträge ein, so ist W = 0 also

$$B = \frac{L - E}{E}$$

und tritt man bloß durch ein Antrittsgeld ein, so ist B = 0 also

$$W = L - E \text{ wie zuvor.}$$

10) Um auch dieses Verfahren auf einen bestimmten Ausdruck zurückzuführen, so sey x das m^{te} Glied der horizontalen, und das n^{te} Glied der vertikalen Reihen zwischen den vier Größen

A B
C D.

Vorausgesetzt, daß man (N — 1) horizontale und eben so viel neue verticale Reihen zwischen jenen einschalten will, so hat man

$$x = A + m\,\frac{(B - A)}{N} + n\,\frac{(C - A)}{N}$$

$$+ m\,n\,\frac{(D - C - B + A)}{N^2}.$$

In unserem Beyspiele (S. 65) ist N — 1 = 4 oder N = 5 und A = 3.088, B = 2.683, C = 3.653, D = 3.194 also

$$x = 3.088 - 0.081\,m + 0.113\,n - 0.00216\,m\,n.$$

Für m = 2 und n = 3 findet man x = 3.252
m = 3 und n = 2 — — x = 3.058 u. s. mit der (S. 66) gegebenen Ergänzungstafel übereinstimmend.

11) Um, analog mit dem Vorhergehenden, auch hier den analytischen Ausdruck zu geben, durch welchen die Waisenpensionen bestimmt werden, so sey m das Alter des Vaters, n der Mutter und p des Kindes bey dem Eintritte des letzten in die Waisenanstalt. Die jährliche Pension des Kindes soll einen Gulden betragen, und von dem Tage, wo beyde Aeltern todt sind, bis zu dem $t$ten Lebensjahre des Kindes ausgezahlt werden. Nennt man w den Werth dieser Pension oder das Antrittsgeld, welches der Vater dafür zu erlegen hat, und b den jährlichen Beytrag, der so lange bezahlt wird, als der Vater lebt (die Mutter zahlt nach dem Tode des Vaters keine Beyträge mehr), und setzt man der Kürze wegen

$$M = \frac{1}{A_p}\left(\frac{A_{p+1}}{r} + \frac{A_{p+2}}{r^2} + \frac{A_{p+3}}{r^3}\ldots \text{bis} + \frac{A_t}{r^{t-p}}\right)$$

$$N = \frac{1}{A_m A_p}\left(\frac{A_{m+1}A_{p+1}}{r} + \frac{A_{m+2}A_{p+2}}{r^2}\ldots + \frac{A_{m+t-p}A_t}{r^{t-p}}\right)$$

$$P = \frac{1}{A_p A_m}\left(\frac{A_{p+1}A_{m+1}}{r} + \frac{A_{p+2}A_{m+2}}{r^2}\ldots + \frac{A_t A_{m+t-p}}{r^{t-p}}\right)$$

$$Q = \frac{1}{A_m A_n A_p}\left(\frac{A_{m+1}A_{n+1}A_{p+1}}{r} + \frac{A_{m+2}A_{n+2}A_{p+2}}{r^2}\ldots + \frac{A_{m+t-p}A_{n+t-p}A_t}{r^{t-p}}\right)$$

so hat man

$$w - M + (b + 1) N + P - Q = 0$$

aus welcher Gleichung sich das Antrittsgeld w bestimmen läßt, wenn der jährliche Beytrag b gegeben ist und umgekehrt.

Für $b = o$ ist $w = M - N - P + Q$

und für $w = o$ ist $b = \frac{M - N - P + Q}{N}$

Wird aber diese Pension schon bey dem Tode des Vaters, also auch noch während dem Leben der Mutter, ausgezahlt und zwar von dem Todestage des Vaters bis zu dem t^{ten} Lebensalter des Kindes, so ist P und Q gleich Null, und daher die vorhergehende Gleichung

$$w - M + (b + 1) N = 0$$

Für $b = 0$ ist $w = M - N$, und für $w = 0$ ist $b = \frac{M - N}{N}$.

Hier mag der Ort seyn, die Ausdrücke zusammen zustellen, welche sich auf die verschiedenen Anwendungen der Sterblichkeitstabellen gründen, und die unter der Benennung der Halley'schen Formeln bekannt sind.

I. Von N Ehepaaren, in welchen jeder Mann jetzt m, und jede Frau n Jahre alt ist, ist die Anzahl der noch beysammen lebenden Ehepaare

nach dem 1. Jahre . . $N . \frac{A_{m+1} . A_{n+1}}{A_m A_n}$

2. — . . $N . \frac{A_{m+2} . A_{n+2}}{A_m A_n}$

3. — . . $N . \frac{A_{m+3} . A_{n+3}}{A_m A_n}$ u. s. w.

also überhaupt nach dem x^{ten} J. $N . \frac{A_{m+x} . A_{n+x}}{A_m A_n}$.

II. Eben so ist die Zahl der ganz ausgestorbenen Ehepaare nach dem x^{ten} Jahre gleich

$$N . \frac{(A_m - A_{m+x})}{A_m} . \frac{(A_n - A_{n+x})}{A_n}$$

III. Die Summe der getrennten Paare, wo der Mann noch lebt, und die Frau schon todt ist, ist nach x Jahren

$$N . \frac{A_{m+x}}{A_m} . \frac{(A_n - A_{n+x})}{A_n}$$

IV. Die Summe der getrennten Paare, wo die Frau noch lebt und Mann schon todt ist nach x Jahren

$$N. \frac{(A_m - A_{m+x})}{A_m} \cdot \frac{A_{n+x}}{A_n} .$$

V. Läßt man in den vier vorhergehenden Ausdrücken die Größe N weg, oder setzt man N = 1, so gibt I die Wahrscheinlichkeit, daß von den ursprünglichen N Paaren nach x Jahren noch ein ganz ungetrenntes Paar übrig ist; II aber die Wahrscheinlichkeit, daß nach x Jahren alle Paare ausgestorben sind; III die Wahrscheinlichkeit, daß von einem getrennten Paare noch der Mann lebe, und IV die Wahrscheinlichkeit, daß von einem getrennten Paare noch die Frau lebe, aber der Mann schon todt sey.

VI. Die mittlere Dauer des Zusammenlebens (die Dauer der Ehe) jedes Paares ist endlich . . .

$$\frac{A_{m+1} A_{n+1} + A_{m+2} A_{n+2} + A_{m+3} A_{n+3} + \ldots}{A_m A_n}$$

Tafel I.

Sterblichkeitstafel nach Süßmilch und Baumann.

n Alter	A Lebende	B Gestorbene	C Summe der Lebenden	D Discontirte Zahlen der Lebenden	E Summen der discontirten Zahlen der Lebenden	F Mittlere Lebensdauer
0	1000	250	28988	1000	10782.27828	28.49
1	750	89	27988	714.28571	9782.27828	36.72
2	661	43	27238	599.54648	9067.99257	40.71
3	618	25	26577	533.85164	8468.44608	42.50
4	593	14	25959	487.86257	7934.59445	43.28
5	579	12	25366	453.66165	7446.73188	43.31
6	567	11	24787	423.10412	6993.07023	43.22
7	556	9	24220	395.13881	6569.96610	43.06
8	547	8	23664	370.23113	6174.82728	42.76
9	539	7	23117	347.44420	5804.59614	42.39
10	532	5	22578	326.60185	5457.15194	41.94
11	527	4	22046	308.12598	5130.55009	41.33
12	523	4	21519	291.22596	4822.42410	40.65
13	519	4	20996	275.23678	4531.19813	39.96
14	515	4	20477	260.10999	4255.96135	39.26
15	511	4	19962	245.79973	4995.85136	38.56
16	507	4	19451	232.26254	3750.05162	37.86
17	503	4	18944	219.45723	3517.78908	37.16
18	499	4	18441	207.34480	3298.33184	36.46
19	495	4	17942	195.88830	3090.98704	35.75
20	491	5	17447	185.05273	2895.09873	35.03
21	486	5	16956	174.44598	2710.04599	34.39
22	481	5	16470	164.42978	2535.60000	33.74
23	476	5	15989	154.97194	2371.17021	33.09
24	471	5	15513	146.04198	2216.19827	32.44
25	466	5	15042	137.61109	2070.15629	31.78
26	461	5	14576	129.65197	1932.54520	31.12
27	456	5	14115	122.13883	1802.89322	30.45
28	451	6	13659	115.04723	1680.75438	29.79
29	445	6	13208	108.11111	1565.70715	29.18
30	439	6	12763	101.57470	1457.59605	28.57
31	433	6	12324	59.41565	1356.02135	27.96
32	427	6	11891	89.61285	1260.60569	27.35
33	421	6	11464	84.14633	1170.99284	26.73
34	415	6	11043	78.99724	1086.84650	26.11
35	409	7	10628	74.14772	1007.84926	25.49
36	402	7	10219	69.40828	933.70153	24.92
37	395	7	9817	64.95207	864.29325	24.35
38	388	7	9422	60.76288	799.34117	23.78
39	381	7	9034	56.82537	738.57829	23.21

n Alter	A Lebende	B Gestorbene	C Summe der Lebenden	D Discontirte Zahlen der Lebenden	E Summen der discontirten Zahlen der Lebenden	F Mittlere Lebensdauer
40	374	7	8653	53.12508	681.75292	22.64
41	367	7	8279	49.64835	628.62783	22.06
42	360	7	7912	46.38226	578.97949	21.48
43	353	7	7552	43.31465	532.50722	20.89
44	346	7	7199	40.43402	489.28257	20.31
45	339	7	6853	37.72952	448.84855	19.72
46	332	8	6514	35.19090	411.11903	19.12
47	324	8	6182	32.70755	375.92813	18.58
48	316	8	5858	30.38091	343.22059	18.04
49	308	8	5542	28.20169	312.83968	17.49
50	300	9	5234	26.16112	284.63800	16.95
51	291	9	4934	24.16789	258.47688	16.46
52	282	9	4643	22.30517	234.30899	15.96
53	273	9	4361	20.56505	212.00382	15.48
54	264	9	4088	18.94008	191.43877	14.98
55	255	9	3824	17.42323	172.49869	14.50
56	246	9	3569	16.00790	155.07546	14.01
57	237	9	3323	14.68785	139.06756	13.52
58	228	9	3086	13.45722	124.37970	13.04
59	219	9	2858	12.31049	110.92248	12.55
60	210	9	2639	11.24246	98.61199	12.07
61	201	9	2429	10.24822	87.36953	11.58
62	192	10	2228	9.32319	77.12130	11.10
63	182	10	2036	8.41677	67.79810	10.69
64	172	10	1854	7.57554	59.38133	10.28
65	162	10	1682	6.79533	51.80580	9.88
66	152	10	1520	6.07225	45.01047	9.50
67	142	10	1368	5.40263	38.93821	9.13
68	132	10	1226	4.78301	33.53558	8.79
69	122	10	1094	4.21016	28.75257	8.47
70	112	9	972	3.68101	24.54241	8.18
71	103	9	860	3.22401	20.86140	7.85
72	94	9	757	2.80219	17.63739	7.55
73	85	8	663	2.41324	14.83519	7.30
74	77	8	578	2.08201	12.42195	7.01
75	69	7	501	1.77685	10.33995	6.76
76	62	7	432	1.52056	8.56309	6.74
77	55	6	370	1.28466	7.04253	6.23
78	49	6	315	1.09001	5.75787	5.93
79	43	6	266	0.91099	4.66786	5.69
80	37	5	223	0 74658	3.75687	5.53
81	32	4	186	0.61492	3.01032	5.31
82	28	4	154	0.51243	2.39541	5.00
83	24	4	126	0.41831	1.88297	4.75
84	20	3	102	0.33199	1.46466	4.60

n Alter	A Lebende	B Gestorbene	C Summe der Lebenden	D Discontirte Zahlen der Lebenden	E Summen der discontirten Zahlen der Lebenden	F. Mittlere Lebensdauer
85	17	3	82	0.26876	1.13267	4.32
86	14	2	65	0.21079	0.86391	4.14
87	12	2	51	0.17207	0.65312	3.75
88	10	2	39	0.13657	0.48105	3.40
89	8	2	29	0.10405	0.34449	3.12
90	6	1	21	0 07432	0.24044	3.00
91	5	1	15	0.05899	0.16611	2.50
92	4	1	10	0.04494	0.10713	2.00
93	3	1	6	0.03210	0.06219	1.50
94	2	1	3	0.02038	0.03009	1.00
95	1	0	1	0.00971	0.00971	
96	0	0	0			

Tafel II.

Werthe der Capitalien und der Jahrrenten von einem Gulden auf mehrere Jahre zu 5 pCt.

Jahre m	Werth des Capitals von einem Gulden		Werth der Leibrente von einem Gulden
	nach m Jahren	vor m Jahren	
1	1.05000 00000	0.95238 09524	0.95238 09524
2	1.10250 00000	0.90702 94785	1.85941 04309
3	1.15762 50000	0.86383 75985	2.72324 80294
4	1.21550 62500	0.82270 24748	3.54595 05042
5	1.27628 15625	0.78352 61665	4.32947 66707
6	1.34009 56406	0.74621 53966	5.07569 20073
7	1.40710 04227	0.71068 13301	5.78637 33974
8	1.47745 54438	0.67683 93620	6.46321 27594
9	1.55132 82160	0.64460 89162	7.10782 16756
10	1.62889 46268	0.61391 32535	7.72173 49291
11	1.71033 93581	0.58467 92891	8 30647 42182
12	1.79585 63260	0.55683 74182	8.86325 16364
13	1.88564 91423	0.53032 13506	9.39357 29870
14	1.97993 15994	0 50506 79530	9.89864 09400
15	2.07892 81794	0 48101 70981	10.37965 80381
16	2.18287 45884	0.45811 15220	10.83776 95601
17	2.29201 83178	0.43629 66876	11.27406 62477
18	2.40661 92337	0.41552 06549	11.68958 69026
19	2 52695 01954	0.39573 39570	12.08532 08596
20	2.65329 77051	0.37688 94829	12.46221 03425
21	2.78596 25904	0.35894 23646	12.82115 27071
22	2.92526 07199	0.34184 98711	13.16300 25782
23	3.07152 37559	0.32557 13058	13.48857 38840
24	3.22509 99437	0.31006 79103	13.79864 17943
25	3.38635 49409	0.29530 27717	14.09394 45660
26	3.55567 26879	0.28124 07349	14.37518 53009
27	3.73345 63223	0.26784 83190	14.64303 36199
28	3.92012 91385	0.25509 36371	14.89812 72570
29	4.11613 55954	0.24294 63211	15.14107 35781
30	4.32194 23751	0.23137 74487	15.37245 10268
31	4.53803 94939	0.22035 94749	15.59281 05017
32	4.76494 14686	0.20986 61666	15.80267 66683
33	5 00318 85420	0.19987 25396	16 00254 92079
34	5.25334 79691	0.19035 47996	16.19290 40075
35	5.51601 53676	0.18129 02854	16.37419 42929
36	5.79181 61360	0.17265 74146	16.54685 17075
37	6.08140 69428	0.16443 56330	16.71128 73405
38	6.38547 72899	0.15660 53647	16.86789 27052
39	6.70475 11544	0.14914 79664	17.01704 06716
40	7.03998 87121	0.14204 56823	17.15908 63539

Jahre m	Werth des Capitals von einem Gulden		Werth der Leibrente von einem Gulden
	nach m Jahren	vor m Jahren	
41	7.39198 81477	0.13528 16022	17.29436 79561
42	7.76158 75551	0.12883 96211	17.42320 75772
43	8.14966 69329	0.12270 44011	17.54591 19783
44	8.55715 02795	0.11686 13344	17.66277 33127
45	8.98500 77935	0.11129 65089	17.77406 98216
46	9.43425 81832	0.10599 66752	17.88006 64968
47	9.90597 10923	0.10094 92144	17.98101 57112
48	10.40126 96469	0.09614 21090	18.07715 78202
49	10.92133 31293	0.09156 39133	18.16872 17335
50	11.46739 97858	0.08720 37270	18.25592 54605
51	12.04076 97750	0.08305 11685	18.33897 66290
52	12.64280 82638	0.07909 63510	18 41807 29800
53	13.27494 86770	0.07532 98581	18.49340 28381
54	13.93869 61108	0.07174 27220	18.56514 55601
55	14.63563 09164	0.06832 64019	18.63347 19620
56	15.36741 24622	0.06507 27637	18.69854 47257
57	16.13578 30853	0.06197 40607	18.76051 87864
58	16.94257 22396	0.05902 29149	18.81954 17013
59	17.78970 08515	0.05621 22999	18.87575 40012
60	18.67918 58941	0.05353 55237	18.92928 95249
61	19.61314 51888	0.05098 62131	18.98027 57380
62	20.59380 24483	0.04855 82982	19.02883 40362
63	21.62349 25707	0.04624 59983	19.07508 00345
64	22.70466 71992	0.04404 38079	19.11912 38424
65	23.83990 05592	0.04194 64837	19.16107 03261
66	25.03189 55871	0.03994 90321	19.20101 93582
67	26.28349 03665	0.03804 66972	19.23906 60554
68	27.59766 48848	0.03623 49497	19.27530 10051
69	28.97754 81291	0.03450 94759	19.30981 04810
70	30.42642 55355	0.03286 61676	19.34267 66486
71	31.94774 68123	0.03130 11120	19.37397 77606
72	33.54513 41529	0.02981 05828	19.40378 83434
73	35.22239 08605	0.02839 10313	19.43217 93747
74	36.98351 04036	0.02703 90774	19.45921 84521
75	38.83268 59238	0.02575 15023	19.48496 99544
76	40.77432 02199	0.02452 52403	19.50949 51947
77	42.81303 62309	0.02335 73717	19.53285 25664
78	44.95368 80425	0.02224 51159	19.55509 76823
79	47.20137 24446	0.02118 58247	19.57628 35070
80	49.56144 10668	0.02017 69759	19.59640 04829
81	52.03951 31202	0.01921 61675	19.61567 66504
82	54.64148 87762	0.01830 11119	19.63397 77623
83	57.37356 32150	0.01742 96304	19.65140 73927
84	60.24224 13757	0.01659 96480	19.66800 70407
85	63.25435 34445	0.01580 91885	19 68381 62292

Jahre m	Werth des Capitals von einem Gulden		Werth der Leibrente von einem Gulden
	nach m Jahren	vor m Jahren	
86	66.41707 11168	0.01505 63700	19.69887 25992
87	69.73792 46726	0.01433 94000	19.71321 19992
88	73.22482 09062	0.01365 65715	19.72686 85707
89	76.88606 19515	0.01300 62585	19.73987 48292
90	80.73036 50491	0.01238 69129	19.75226 17421
91	84.76685 33016	0.01179 70599	19.76405 88021
92	89.00522 74667	0.01123 52951	19.77529 40971
93	93.45548 88400	0.01070 02811	19.78599 43782
94	98.12826 32820	0.01019 07439	19.79618 51221
95	103.03467 64461	0.00970 54704	19.80589 05925
96	108.18641 02684	0.00924 33051	19.81513 38976
97	113.59573 07818	0.00880 31477	19.82393 70453
98	119.27551 73209	0.00838 39502	19.83232 09955
99	125.23929 31869	0.00798 47145	19.84030 57100
100	131.50125 78463	0.00760 44900	19.84791 02000

Tafel III.

Lebensrenten von einem Gulden jährlich.

Alter	3 pCt.	4 pCt.	5 pCt.	Alter	3 pCt.	4 pCt.	5 pCt.
0	13.6601	11.4315	9.7823	45	13.3349	12.0108	10.8964
1	17.7598	14.8517	12.6952	46	13.0246	11.7546	10.6825
2	19.7556	16.5255	14.1247	47	12.7466	11.5266	10.4936
3	20.7641	17.3823	14.8629	48	12.4613	11.2912	10.2972
4	21.2887	17.8397	15.2640	49	12.1686	11.0478	10.0928
5	21.4576	18.0017	15.4147	50	11.8679	10.7961	9.8802
6	21.5690	18.1182	15.5280	51	11.6020	10.5752	9.6950
7	21.6556	18.2157	15.6270	52	11.3314	10.3492	9.5047
8	21 6723	18.2560	15.6783	53	11.0561	10.1180	9.3089
9	21.6538	18.2681	15.7066	54	10.7760	9.8815	9.1076
10	21.5969	18.2488	15.7089	55	10.4910	9.6394	8.9005
11	21.4558	18.1588	15.6508	56	10.2011	9.3918	8.6874
12	21.2685	18.0296	15.5590	57	9.9061	9.1384	8.4682
13	21.0754	17.8953	15.4629	58	9.6061	8.8790	8.2425
14	20.8763	17.7556	15.3622	59	9.3009	8.6137	8.0104
15	20.6709	17.6104	15.2563	60	8.9905	8.3422	7.7714
16	20.4590	17.4593	15.1457	61	8.6748	8.0643	7.5253
17	20.2403	17.3020	15.0295	62	8.3539	7.7800	7.2719
18	20.0146	17.1383	14.9075	63	8.0773	7.5358	7.0551
19	19.7817	16.9681	14.7793	64	7.8033	7.2929	6.8385
20	19.5411	16.7905	14.6147	65	7.5335	7.0528	6.6237
21	19.3344	16.6417	14.5352	66	7.2700	6.8175	6.4124
22	19.1214	16.4872	14.4206	67	7.0155	6.5895	6.2072
23	18.9020	16.3268	14.3006	68	6 7733	6.3722	6.0113
24	18 6757	16.1601	14.1751	69	6.5484	6.1703	5.8292
25	18.4424	15.9870	14.0435	70	6.3470	5.9901	5.6672
26	18.2017	15.8068	13.9056	71	6.1087	5.7740	5.4705
27	17.9533	15 6193	13.7610	72	5.8944	5.5799	5.2940
28	17.6969	15.4242	13.6092	73	5.7140	5.4176	5.1472
29	17.4736	15.2575	13.4824	74	5.4969	5.2197	4.9661
30	17.2438	15.0847	13.3550	75	5.3183	5.0578	4.8192
31	17.0072	14.9055	13.2117	76	5.0963	4.8541	4.6315
32	16.7636	14.7195	13.0672	77	4.9173	4.6907	4.4821
33	16.5125	14 5265	12.9161	78	4.6850	4.4757	4.2824
34	16.2538	14.3260	12.7580	79	4.4989	4.3043	4.1239
35	15.9870	14.1175	12.5924	80	4.3853	4.2023	4.0323
36	15.7534	13.9379	12.4523	81	4.2226	4.0532	3.8955
37	15.5135	13.7523	12.3066	82	3.9706	3.8175	3.6746
38	15.2672	13.5604	12.1551	83	3.7713	3.6319	3.5014
39	15.0141	13.3619	11.9973	84	3.6613	3.5326	3.4117
40	14.7540	13.1565	11.8330	85	3.4367	3.3222	3.2145
41	14.4865	12.9437	11.6616	86	3.2983	3.1957	3.0985
42	14.2112	12.7233	11.4827	87	2.9634	2.8775	2.7956
43	13.9278	12.4946	11.2963	88	2.6628	2.5991	2.5225
44	13.6359	12.2572	11.1007	89	2.4284	2.3684	2[illegible]
				90	2.3350	2.2841	[illegible]

Ta-

Antrittsgeld und jährlicher Beytrag für eine

Alter des Mannes.	Alter der Frau.							
	15	20	25	30	35	40	45	50
15	2.981 0.1939	2.659 0.1787	2.352 0.1635	2.048 0.1486	1.754 0.1338	1.481 0.1192	1.213 0.1051	0.969 0.0916
20	3.479 0.2338	3.114 0.2159	2.765 0.1979	2.416 0.1800	2.076 0.1624	1.760 0.1450	1.447 0.1280	1.162 0.1119
25	3.976 0.2764	3.568 0.2554	3.176 0.2342	2.780 0.2130	2.393 0.1919	2.030 0.1710	1.670 0.1506	1.341 0.1314
30	4.574 0.3318	4.122 0.3072	3.682 0.2821	3.235 0.2568	2.794 0.2315	2.378 0.2063	1.962 0.1817	1.579 0.1585
35	5.248 0.4002	4.750 0.3714	4.263 0.3418	3.761 0.3116	3.262 0.2811	2.786 0.2506	2.306 0.2206	1.862 0.1923
40	5.936 0.4779	5.395 0.4443	4.862 0.4095	4.307 0.3737	3.748 0.3371	3.210 0.3002	2.661 0.2635	2.149 0.2288
45	6.814 0.5902	6.228 0.5506	5.647 0.5093	5.036 0.4665	4.413 0.4222	3.807 0.3770	3.177 0.3316	2.582 0.2881
50	7.785 0.7362	7.157 0.6894	6.533 0.6403	5.869 0.5890	5.184 0.5355	4.510 0.4801	3.797 0.4237	3.112 0.3692
55	8.732 0.9071	8.068 0.8518	7.405 0.7937	6.694 0.7326	5.954 0.6682	5.219 0.6008	4.427 0.5313	3.655 0.4634
60		9.141 1.0886	8.443 1.0183	7.689 0.9441	6.897 0.8655	6.103 0.7824	5.233 0.6954	4.372 0.6097
65			9.522 1.3200	8.731 1.2293	7.896 1 1328	7.055 1.0300	6.117 0.9210	5.175 0.8127
70				9.611 1.5450	8.744 1.4286	7.869 1.3039	6.879 1.1701	5.875 1.0366
75					9.510 1.7760	8.609 1.6257	7.757 1.4625	6.523 1.2992
80						9.311 2.0270	8.245 1.8272	7.149 1.6266
85							8.960 2.3588	7.825 2.1042
90								8.673 3.0212

fel V.

Wittwenrente von einem Gulden. 4 pCt.

Alter des Mannes	Alter der Frau							
	55	60	65	70	75	80	85	90
15	0.760 0.0789							
20	0.915 0.0966	0.691 0.0823						
25	1.056 0.1132	0.797 0.0961	0.583 0.0812					
30	1.248 0.1366	0.945 0.1160	0.697 0.0982	0.515 0.0828				
35	1.475 0.1656	1.120 0.1406	0.829 0.1190	0.615 0.1005	0.449 0.0839			
40	1.701 0.1958	1.288 0.1651	0.950 0.1387	0.701 0.1162	0.509 0.0961	0.355 0.0772		
45	2.055 0.2467	1.564 0.2078	1.158 0.1743	0.857 0.1458	0.623 0.1204	0.435 0.0965	0.269 0.0710	
50	2.498 0.3167	1.918 0.2674	1.431 0.2248	1.068 0.1885	0.783 0.1560	0.553 0.1259	0.349 0.0940	0.197 0.0631
55	2.953 0.3972	2.277 0.3343	1.705 0.2798	1.275 0.2336	0.935 0.1921	0.659 0.1537	0.413 0.1129	0.232 0.0752
60	3.574 0.5247	2.789 0.4426	2.111 0.3711	1.595 0.3102	1.180 0.2553	0.838 0.2040	0.527 0.1487	0.293 0.0968
65	4.292 0.7044	3.401 0.5978	2.615 0.5043	2.008 0.4246	1.513 0.3525	1.097 0.2849	0.708 0.2109	0.403 0.1390
70	4.926 0.9020	3.947 0.7677	3.071 0.6494	2.386 0.5485	1.822 0.4574	1.342 0.3720	0.884 0.2776	0.513 0.1844
75	5.518 1.1334	4.465 0.9657	3.508 0.8174	2.754 0.6916	2.125 0.5777	1.585 0.4715	1.063 0.3537	0.625 0.2350
80	6.097 1.4216	4.979 1.2116	3.948 1.0252	3.130 0.8678	2.441 0.7260	1.843 0.5936	1.259 0.4481	0.756 0.3000
85	6.731 1.8415	5.547 1.5664	4.440 1.3215	3.552 1.1157	2.799 0.9313	2.139 0.7613	1.477 0.5701	0.902 0.3812
90	7.544 2.6540	6.291 2.2516	5.097 1.8860	4.127 1.5819	3.290 1.3091	2.549 1.0629	1.797 0.7913	1.066 0.4878

Ta=

Antrittsgeld und jährlicher Beytrag für eine

Alter des Mannes	Alter der Frau								
	5	10	15	20	25	30	35	40	45
5	2.583 0.1902	2.556 0.1839	2.387 0.1752	2.195 0.1663	2.009 0.1571	1.817 0.1478	1.623 0.1385	1.437 0.1289	1.296 0.1252
10	2.262 0.1627	2.209 0.1549	2.034 0.1456	1.841 0.1359	1.655 0.1260	1.466 0.1159	1.278 0.1050	1.100 0.0958	0.918 0.0856
15	2.545 0.1868	2.486 0.1779	2.290 0.1670	2.073 0.1556	1.862 0.1440	1.647 0.1322	1.433 0.1204	1.259 0.1112	1.024 0.0964
20	2.965 0.2246	2.905 0.2144	2.685 0.2015	2.437 0.1881	2.196 0.1744	1.949 0.1604	1.702 0.1462	1.466 0.1319	1.225 d.1175
25	3.380 0.2644	3.320 0.2527	3.075 0.2378	2.798 0.2221	2.525 0.2059	2.244 0.1893	1.962 0.1723	1.691 0.1552	1.413 0.1381
30	3.881 0.3160	3.824 0.3027	3.553 0.2853	3.243 0.2669	2.937 0.2477	2.618 0.2280	2.295 0.2077	1.984 0.1872	1.662 0.1665
35	4.445 0.3793	4.394 0.3642	4.097 0.3441	3.754 0.3225	3.413 0.2999	3.053 0.2763	2.685 0.2520	2.329 0.2271	1.957 0.2020
40	5.019 0.4503	4.976 0.4333	4.683 0.4202	4.278 0.3848	3.901 0.3582	3.501 0.3303	3.088 0.3012	2.683 0.2710	2.257 0.2404
45	5.814 0.5617	5.731 0.5342	5.384 0.5068	4.973 0.4772	4.560 0.4456	4.116 0.4122	3.653 0.3770	3.194 0.3401	2.703 0.3021
50	6.584 0.6872	6.578 0.6657	6.208 0.6335	5.763 0.5984	5.316 0.5609	4.829 0.5209	4.317 0.4782	3.806 0.4331	3.244 0.3861
55	7.391 0.8425	7.409 0.8772	7.018 0.7808	6.543 0.7393	6.065 0.6948	5.540 0.6469	4.983 0.5960	4.419 0.5412	3.794 0.4833
60	8.349 1.0682	8.399 1.0421	7.990 0.9967	7.486 0.9466	6.978 0.8928	6.416 0.8345	5.815 0.7727	5.203 0.7051	4.513 0.6327
65	9.345	9.430	9.007	8.478	7.945	7.353	6.715	6.062	5.313
70	10.185	10.302	9.865	9.319	8.768	8.151	7.486	6.803	6.009
75	10.949	11.082	10.640	10.072	9.511	8.875	8.187	7.482	6.651
80	11.641	11.814	11.367	10.790	10.201	9.562	8.855	8.131	7.270
85	12.380	12.583	12.131	11.542	10.955	10.289	9.541	8.826	7.936
90	13.273	13.516	13.061	12.461	11.864	11.184	10.442	9.692	8.774

fel VI.

Wittwenrente von einem Gulden. 5 pCt.

Alter des Mannes.	Alter der Frau.								
	5	10	15	20	25	30	35	40	45
5	1.049 0.1095	0.877 0.1000	0.705 0.0882	0.437 0.0813	0.437 0.0731	0.353 0.0677	0.259 0.0572	0.180 0.0475	0.093 0.0322
10	0.749 0.0758	0.601 0.0622	0.462 0.0573	0.345 0.0491	0.260 0.0423	0.193 0.0358	0.138 0.0297	0.089 0.0229	0.042 0.0143
15	0.831 0.0828	0.662 0.0737	0.505 0.0630	0.375 0.0536	0.276 0.0450	0.203 0.0378	0.142 0.0307	0.089 0.0247	0.039 0.0134
20	0.999 0.1037	0.799 0.0903	0.613 0.0775	0.457 0.0661	0.342 0.0562	0.246 0.0463	0.178 0.0386	0.112 0.0290	0.051 0.0175
25	1.152 0.1216	0.922 0.1056	0.706 0,0903	0.526 0.0768	0.392 0.0650	0.287 0.0543	0.190 0.0414	0.126 0.0328	0.065 0.0189
30	1.359 0.1466	1.091 0.1274	0.838 0.1090	0.626 0.0928	0.469 0.0788	0.345 0.0660	0.244 0.0538	0.154 0.0403	0.069 0.0237
35	1.604 0.1777	1.291 0.1544	0.994 0.1321	0.746 0.1124	0.560 0.0957	0.414 0.0803	0.295 0.0658	0.163 0.0429	0.084 0.0291
40	1.850 0.2107	1.486 0.1820	1.142 0.1547	0.853 0.1309	0.638 0.1104	0.468 0.0918	0.331 0.0743	0.208 0.0554	0.094 0.0327
45	2.228 0.2651	1.798 0.2291	1.388 0.1946	1.040 0.1643	0.780 0.1383	0.573 0.1148	0.406 0.0927	0.254 0.0686	0.113 0.0394
50	2.695 0.3397	2.193 0.2941	1.706 0.2503	1.289 0.2085	0.974 0.1789	0.722 0.1491	0.517 0.1211	0.330 0.0989	0.151 0.0534
55	3.173 0.4255	2.596 0.3680	2.027 0.3122	1.536 0.2634	1.162 0.2212	0.862 0.1832	0.615 0.1475	0.390 0.1091	0.179 0.0635
60	3.815 0.5597	3.156 0.4861	2.491 0.4132	1.907 0.3488	1.456 0.2935	1.089 0.2430	0.782 0.1955	0.497 0.1434	0.233 0.0807
65	4.546	3.813	3.054	2.367	1.840	1.444	0.815	0.670	0.312
70	5.187	4.396	3.560	2.796	2.193	1.690	1.256	0.836	0.401
75	5.783	4.944	4.041	3.249	2.538	1.975	1.487	1.007	0.492
80	6.364	5.483	4.521	3.406	2.891	2.274	1.731	1.194	0.603
85	6.996	6.076	5.054	4.079	3.290	2.612	2.012	1.402	0.725
90	7.796	6.844	5.759	4.700	3.833	3.076	2.400	1.705	0.841

Wien.

Gedruckt bey Ferdinand Ullrich.

Bey dem Verleger dieses Werkes sind folgende Artikel zu haben:

Die Preise sind in C. M.

Bartak, J. B., gemeinfaßliche Anleitung zur leichten Kenntniß des gestirnten Himmels, mittelst einer beygefügten großen Sternkarte. Mit einer Vorrede von J. J. Littrow. Als passende Beylage zu dessen populärer Astronomie. 2 fl.

Beschreibung des Theseums und dessen unterirdischer Halle in dem öffentlichen Garten nächst der k. k. Burg. Mit einer Kupfertafel. 12. 20 kr.

Fladung, Edelsteinkunde, in Briefen an zwey deutsche Fürstinnen. Mit 1 Kupfer, gebunden, in Taschenformat. 1 fl.

Fornasari, A. J., Edler von Verce, Anleitung zum Uebersetzen aus dem Deutschen in das Italienische, mit angehängter Phraseologie. Zur Erlangung der nöthigen Gewandtheit im Style herausgegeben. 12, geheftet 1 fl.

Fornasari, Nob. di Verce, A. G., Anthologia italiana, ossia Prose e Poesie, scelte da' più celebri Autori italiani antichi e moderni, con brevi notizie sulla vita e sugli scritti di ciascheduno. 8. 3 fl. 30 kr.

Glatz, J., Andachtsbuch für gebildete Familien. Fünfte verbesserte und vermehrte Auflage. Mit einem Titelkupfer. 8. u. 12. 1 fl. 30 kr.

Gräffer, F., gedrängtes geographisch-statistisches Handwörterbuch des östreichischen Kaiserthums, oder alphabetische Uebersicht seiner Provinzen, Kreise, Gespanschaften, Delegationen, Bezirke, seiner Städte, Marktflecken, Dörfer, Berge, Thäler, Seen, Flüsse, und anderer Bestandtheile. Mit Angabe der Lage, Größe, Bevölkerung, Natur- und Kunst-Producte. Mit einer großen Tabelle. 16. 1 fl. 30 kr.

Jenni, R. von, geographisch-statistisch-topographisches Handwörterbuch von Großbritannien und Irland, zur Kenntniß der Natur- und Kunstmerkwürdigkeiten dieser Länder. Nach den besten Quellen bearbeitet und mit einem Meilenzeiger versehen. gr8. 4 fl. 30 kr.

Isfordink, J. N., militärische Gesundheits-Polizey, mit besonderer Beziehung auf die k. k. Armee. 2 Bde. zweyte stark vermehrte Auflage. gr8. 8 fl.

Ischl und seine Soolenbäder, mit 3 Kupfertafeln. 8. geheftet 2 fl.

Littrow, J. J., populäre Astronomie. 2 Theile mit 9 lithogr. Tafeln. gr8. 8 fl.

— — Elemente der Algebra und Geometrie. Mit 2 Kupfertafeln. gr8. 3 fl.

— — Calendariographie, oder Anleitung alle Arten Kalender zu machen. gr8. 4 fl. 30 kr.

Mükisch, Dr. St. A., die Homöopathie, in ihrer Würde als Wissenschaft und Kunst dargestellt. 8. 1 fl. 20 kr.

Pannasch, A., Erinnerungen an Italien, in Briefen; nebst vermischten Gedichten. 8. 1 fl. 20 kr.

Partsch, P., Bericht über das Detonations-Phänomen auf der Insel Meleda bey Ragusa, nebst geogr. stat. und hist. Notizen über diese Insel, und einer geognostischen Skizze von Dalmatien. Mit einer Karte. gr8. 2 fl. 40 kr.

Prechtls praktische Dioptrik, als vollständige und gemeinfaßliche Anleitung zur Verfertigung achromatischer Fernröhre. Nach den neuesten Hülfsmitteln, und eigenen Erfahrungen. Mit 4 Kpfr. gr8. 2 fl. 40 kr.

Schels, J. B., Geschichte der Länder des östreichischen Kaiserstaates. 9 Bde. u. Register, mit einer großen Uebersichts-Karte. gr8. 42 fl.

— — Geschichte des süd-östlichen Europa unter der Herrschaft der Römer und Türken. 2 Bde. gr8. 7 fl.

Steinbüchel, A. von, Beschreibung der k. k. Sammlung ägyptischer Alterthümer. Mit 2 Kupf. 12. 40 kr.

Stiber, C. J., Handbuch des Militär-Geschäfts-Styls für Offiziere der k. k. Armee, mit den nöthigen Vorbegriffen über Geschäftsgang und Geschäftsführung, einer gedrängten Anleitung zum deutschen Style, und der Abhandlung über Inhalt und Form, aller, sowohl in den öffentlichen Dienst-, als Privat-Geschäften vorkommenden Aufsätze, nebst den vorzüglichsten Tabellen. 8. 2 fl. 20 kr.

Troy, Fr., theoretisch-practisches Lehrbuch der französischen Sprache; nach den Sprachlehrrn der Herren Wailli, Restaut, Mozin, Silbert, und in der grammatikalischen Ordnung nach der italienischen Sprachlehre des Prof. v. Fornasari bearbeitet. gr8. 1 fl. 30 kr.

Wächter, Joh., Predigten auf alle Sonntage des Kirchenjahres. Herausgegeben von einigen Freunden des Verewigten. 2 Bde. mit dem Bildnisse des Verfassers. gr8. 3 fl. 30 kr.

